

STATİK

(MADEN MÜHENDİSLİĞİ)

Dr. Öğr. Üyesi Çağlar YALÇINKAYA

(Dokuz Eylül Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü)

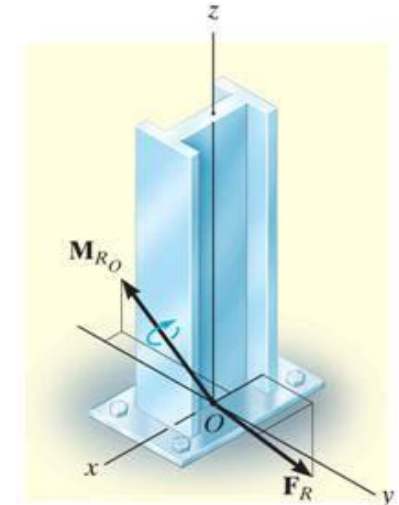
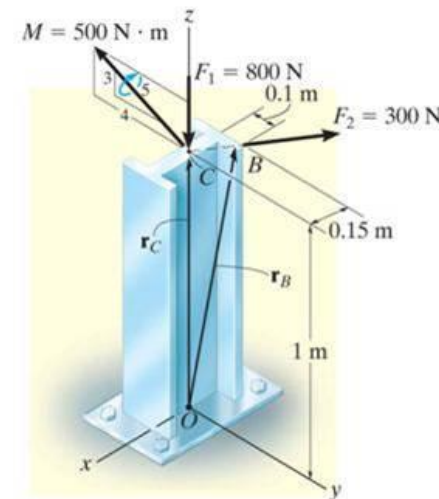
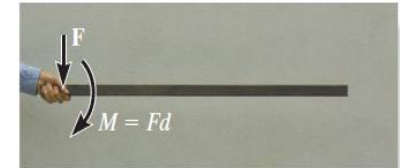
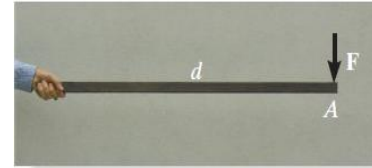
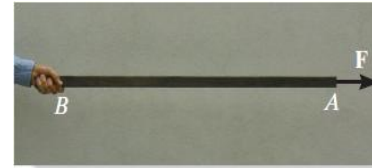
Ders notları için: www.caglaryalcinkaya.com

KUVVET SİSTEMLERİ VE BİLEŞKESİ

•Bu başlık altında moment kavramı, kuvvet ve moment sistemleri, kuvvet sistemlerinin eşdeğer sistemlere indirgenmesi irdelenecektir.

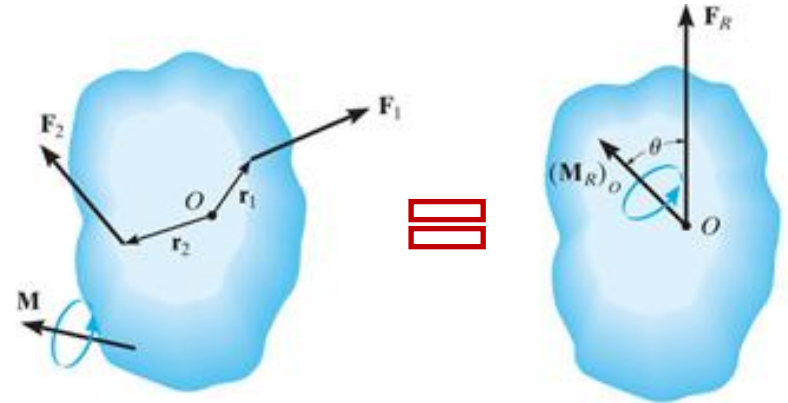
•Şekildeki gibi dört farklı yolla uygulanan kuvvetlerin çubuğu tutan kişinin elinde oluşturduğu nihai etkiler nedir?

•Bu I-profil kirişin tasarımı sırasında, aynı dış etkiyi yaratacak şekilde verilen kuvvetler ve momentleri, O noktasına etkiyen sadece tek bir kuvvet ve bir moment ile değiştirebilseydik çözümde çok kolaylık sağlardı. Bunu nasıl yaparız?



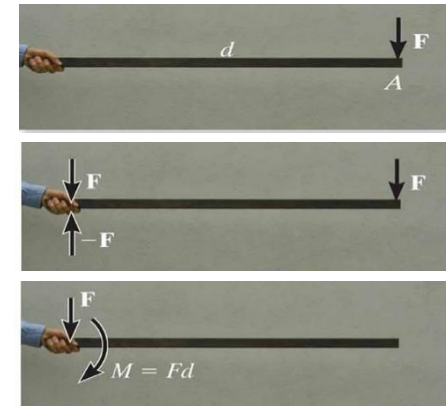
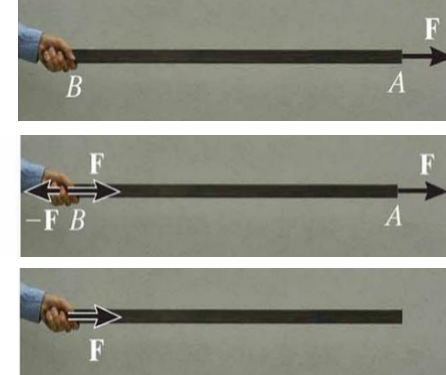
Kuvvet ve kuvvet çifti sistemlerinin basitleştirilmesi

- Bir cisim üzerine etkiyen belirli sayıda kuvveti ve momenti aynı dış etkilere sahip tek bir kuvvet ve momente indirgeyebilirsek, bu etkilerin toplamının cisim üzerindeki etkisini daha kolay anlarız.
- Bu toplam etki, cisim üzerinde aynı **dış** etkileri yaratacağından, bu yeni kuvvet ve moment sistemine **eşdeğer sistemler** adını veriyoruz.



Bir kuvveti etki doğrultusunda taşıma

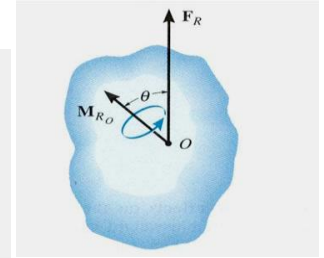
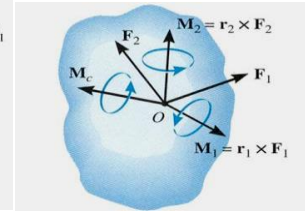
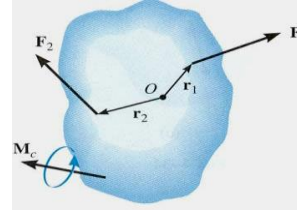
- Bir kuvvetin A'dan B'ye taşınması, eğer A ve B vektörün etki çizgisi üzerindeyse, dış etkilerde herhangi bir değişiklik yaratmaz. Bu sebeple, kuvvet vektörleri “kayan vektör” olarak isimlendirilir (Fakat kuvvetin cisimde yarattığı iç etkiler kuvvetin tam olarak nereye uygulandığına bağlıdır).
- Bir kuvvet taşınırken eğer etki çizgisi boyunca taşınmazsa, yarattığı dış etkilerde değişiklik olur. Yani, bir kuvvetin (yanda gösterildiği gibi) A noktasından B noktasına taşınması, ilave bir moment doğurur. Dolayısıyla yeni bir momenti de eklemek gerekir. Bu moment “serbest” bir vektör olduğundan (tekil moment), bu vektörü cismin herhangi bir noktasına uygulayabiliriz.



Kuvvet ve kuvvet çifti sistemlerini basitleştirme

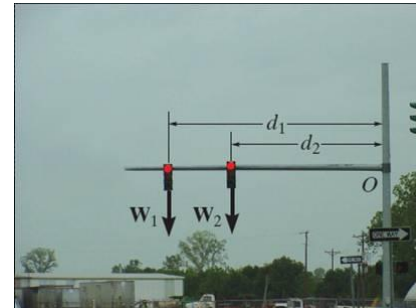
- Bir cisim üzerine çeşitli kuvvetler ve momentler etkiğinde, kuvvetin herbirini ve o kuvvetin oluşturduğu momenti ortak bir O noktasına taşıyabiliriz. Bu durumda tüm kuvvetleri ve momentleri toplayabilir ve bunları tek bir kuvvet-moment ikilisi olarak ifade edebiliriz.

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$$
$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma \mathbf{M}_c + \Sigma \mathbf{M}_O$$



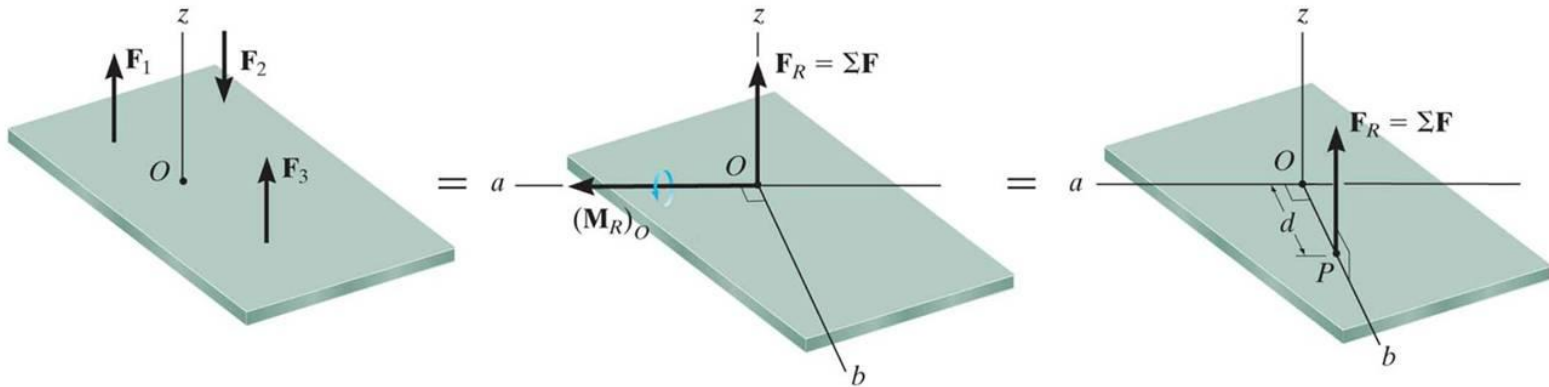
- Eğer kuvvet sistemi x-y düzlemi üzerindeyse (2B durum), indirgenmiş eşdeğer sistem aşağıdaki üç skaler denklem ile bulunabilir;

$$F_{R_x} = \Sigma F_x$$
$$F_{R_y} = \Sigma F_y$$
$$M_{R_O} = \Sigma M_c + \Sigma M_O$$



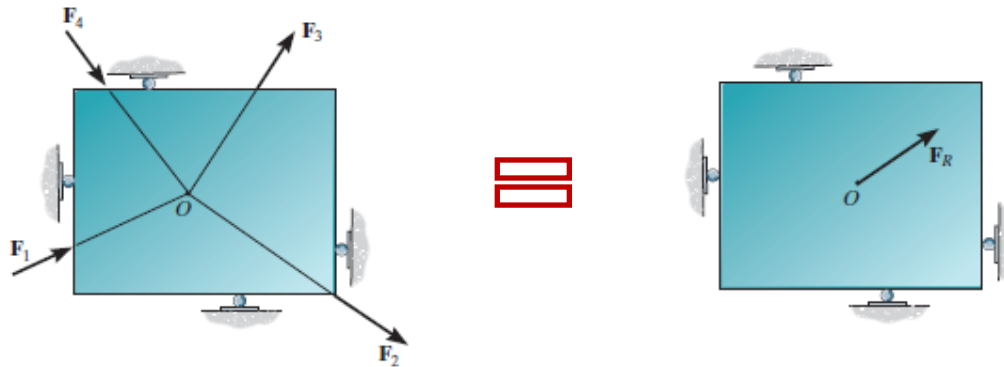
Bir kuvvet ve kuvvet çifti sistemini daha da basitleştirme

- Eğer $\mathbf{F}_R$ ve $\mathbf{M}_{RO}$ birbirine dikse, sistem daha da indirgenerek tek bir $\mathbf{F}_R$ kuvveti ile ifade edilebilir; basitçe $\mathbf{F}_R$ O'dan P'ye taşınır. Üç özel durumda; aynı noktadan geçen, aynı düzlem üzerinde olan ve paralel kuvvet sistemlerinde, sistem her zaman tek bir kuvvete indirgenenebilir.

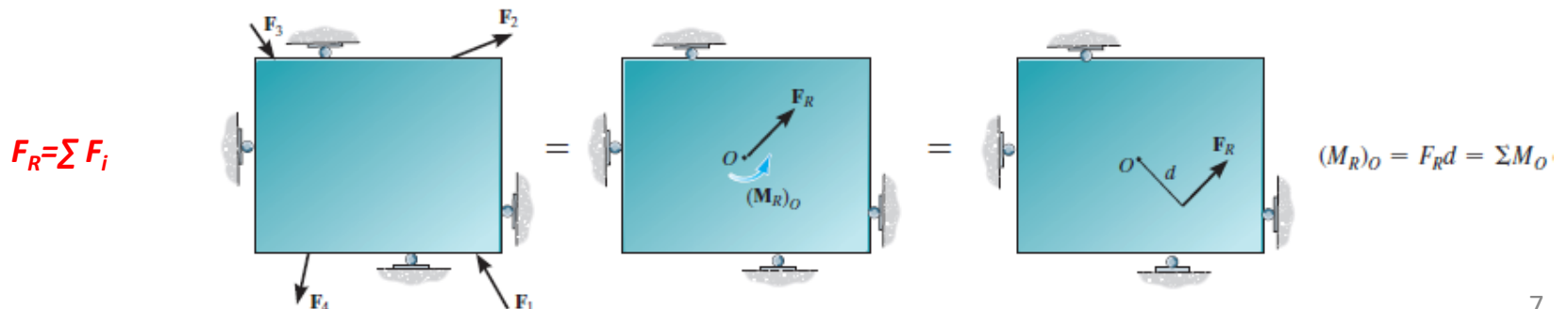


Aynı noktadan geçen / aynı düzlemdeki kuvvet sistemleri

- Bir sisteme etkiyen kuvvetlerin tesir çizgisi aynı noktadan geçiyorsa (Şekilde O noktasında kesişiyor), sistem tek bir kuvvete indirgenebilir. $\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}_i$



- Tesir çizgileri aynı noktadan geçmeyen fakat aynı düzlemde olan kuvvetler de bir moment ihtiva ederek indirgenebilir. Bu moment eksenini, mevcut düzleme ve dolayısıyla da bileşke kuvvete diktir. Bileşke kuvvet bir defa daha kaydırılarak oluşan moment sadece kuvvet sistemine indirgenebilir.



Örnek-1

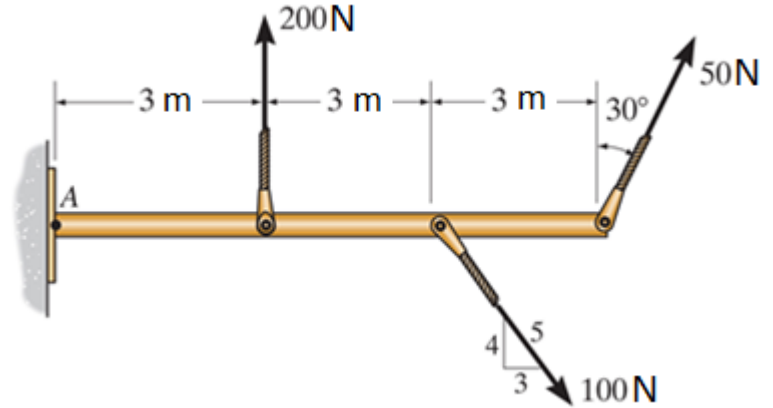
•**Soru:** Şekilde, iki boyutlu (2B) bir kuvvet sistemi ve geometrisi görülüyor. 1) A'ya etkiyen eşdeğer bileşke kuvveti ve momenti bulunuz. Sistemi tek bir eşdeğer bileşke kuvvete indirgeyerek ve bu kuvvetin A'dan uzaklığını tespit ediniz.

•**Çözüm:** F_{RA} 'yı bulmak için sistemin x ve y bileşenleri ayrı ayrı toplanır. Kuvvetler A noktasına taşınıncaya oluşan momentler hesaplanır ve toplanır. F_{RA} öyle bir d mesafesi kadar kaydırılır ki oluşan M_{RA} yansıtılmış olur.

$$+\rightarrow \Sigma F_{Rx} = 50(\sin 30) + 100(3/5) \\ = 85 \text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_{Ry} = 200 + 50(\cos 30) - 100(4/5) \\ = 163,3 \text{ N}$$

$$+\curvearrowleft M_{RA} = 200(3) + 50(\cos 30)(9) \\ - 100(4/5)6 = \underline{509,7 \text{ N.m (saat ibresi tersi)}}$$

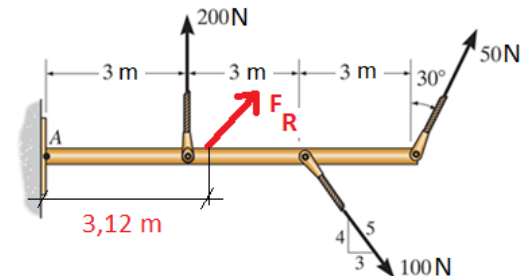


$$F_R = (85^2 + 163,3^2)^{1/2} = \underline{184 \text{ N}}$$

$$\theta = \tan^{-1}(163,3/85) = \underline{62,5^\circ}$$

F_R , A'dan öyle bir d mesafesindeki noktaya konulsun ki sistem eşdeğer olsun;

$$d = M_{RA}/F_{Ry} = 509,7 / 163,3 = \underline{3,12 \text{ m}}$$



Örnek-2

•**Soru:** Şekildeki plaka üç paralel kuvvet etkimektedir. O noktasındaki eşdeğer bileşke kuvveti ve momenti bulunuz. Sistemi tek bir eşdeğer bileşke kuvvete indirgeyip, kuvvetin (x,y) konumunu bulunuz.

•**Çözüm:**

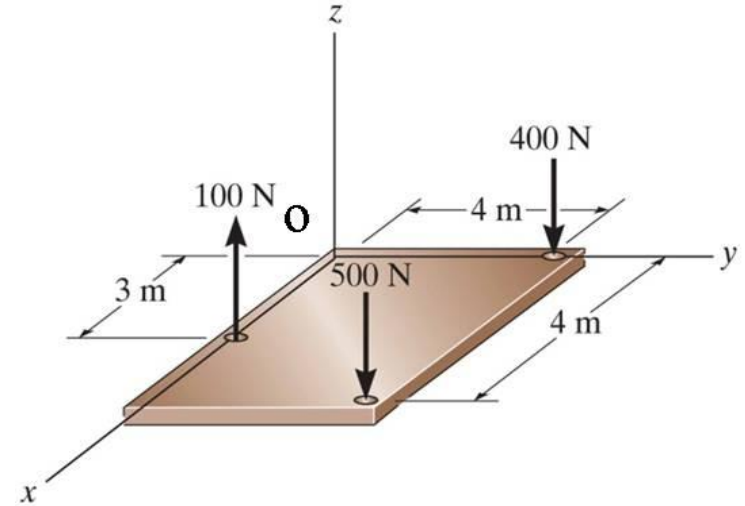
1) $\mathbf{F}_{RO} = \sum \mathbf{F}_i = F_{RzO} \mathbf{k}$ bulunur.

2) $\mathbf{M}_{RO} = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = M_{RxO} \mathbf{i} + M_{RyO} \mathbf{j}$ bulunur

3) $x = -M_{RyO} / F_{RzO}$ ve $y = M_{RxO} / F_{RzO}$ bulunur.

$$\mathbf{F}_{RO} = \{100 \mathbf{k} - 500 \mathbf{k} - 400 \mathbf{k}\} = -800 \mathbf{k} \text{ N}$$

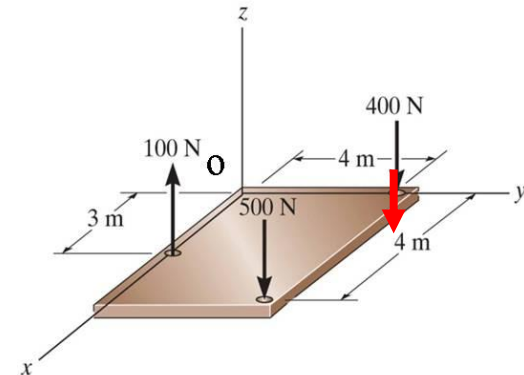
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{RO} &= (3 \mathbf{i}) \times (100 \mathbf{k}) + (4 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j}) \times (-500 \mathbf{k}) \\ &\quad + (4 \mathbf{j}) \times (-400 \mathbf{k}) \\ &= \{-300 \mathbf{j} + 2000 \mathbf{j} - 2000 \mathbf{i} - 1600 \mathbf{i}\} \\ &= \{-3600 \mathbf{i} + 1700 \mathbf{j}\} \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$



Eşdeğer tekil kuvvetin konumu (sağ el kuralı!);

$$x = -M_{RyO} / F_{RzO} = (-1700) / (-800) = 2,13 \text{ m}$$

$$y = M_{RxO} / F_{RzO} = (-3600) / (-800) = 4,5 \text{ m}$$



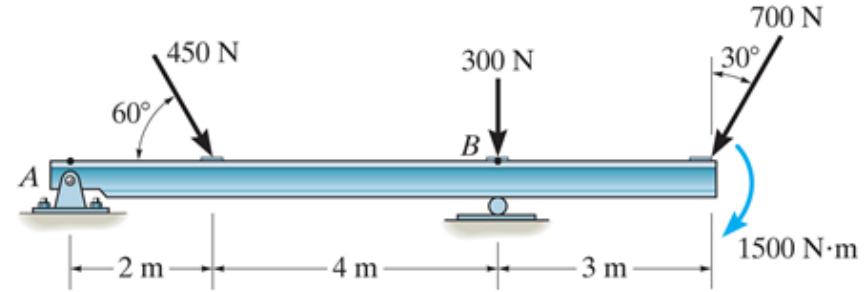
Örnek-3

•**Soru:** Şekilde, iki boyutlu (2B) bir kuvvet-kuvvet çifti sistemi görülüyor. Sistemdeki eşdeğer bileşke kuvveti ve A noktasına etkiyen momenti bulunuz.

•**Çözüm:** Öncelikle F_{RA} 'yı bulmak için kuvvetlerin tüm x ve y bileşenlerini toplanır. Ardından A'ya taşınan her bir kuvvetin sebep olduğu momentler hesaplanır ve toplanır. Toplam momente 1500 N.m'lik tekil momenti de ekleyerek M_{RA} bileşke momenti bulunur.

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 450 (\cos 60) - 700 (\sin 30) \\ = -125 \text{ N}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = -450 (\sin 60) - 300 - 700 (\cos 30) \\ = -1296 \text{ N}$$



Bileşkenin büyüklüğü ve yönü;

$$F_{RA} = (125^2 + 1296^2)^{1/2} = \underline{1302 \text{ N}} \text{ ve}$$

$$\theta = \tan^{-1} (1296 / 125) = \underline{84,5^\circ} \searrow$$

$$\begin{aligned} \curvearrow + M_{RA} &= 450 (\sin 60) (2) + 300 (6) + 700 (\cos 30) (9) + 1500 \\ &= \underline{9535 \text{ N}\cdot\text{m}} \curvearrow \end{aligned}$$

Örnek-4

•**Soru:** Şekildeki boruya kuvvetler ve momentler etmektedir. O noktasında etkili tek bir eşdeğer bileşke kuvvet ve moment çiftini bulunuz.

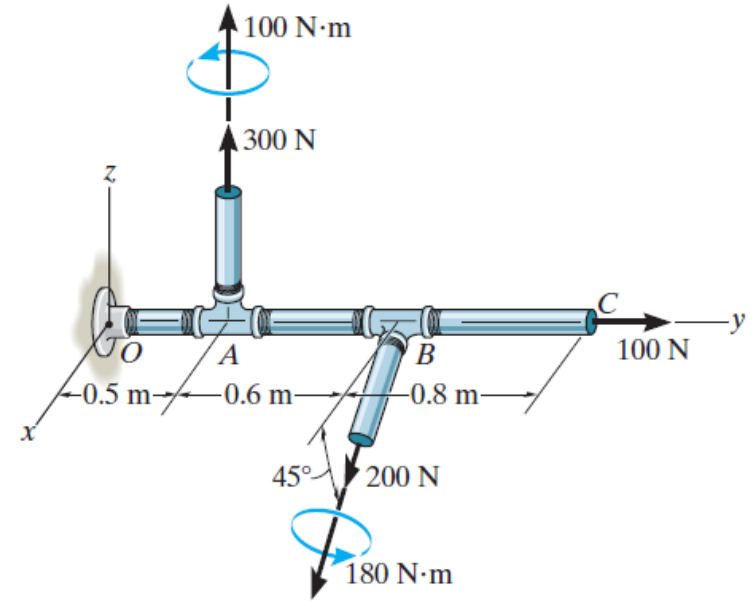
•**Çözüm:**

a) $\mathbf{F}_{RO} = \Sigma \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ bileşke kuvveti bulunur

b) $\mathbf{M}_{RO} = \Sigma \mathbf{M}_T + \Sigma (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$ momentler toplamı bulunur.

$\mathbf{M}_T$: tekil momentler,

$\mathbf{r}_i$: O noktasından her bir $\mathbf{F}_i$ kuvvetinin etki çizgisi üzerindeki herhangi bir noktaya uzanan konum vektörleri.



$$\mathbf{F}_1 = \{300 \mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= 200\{\cos 45^\circ \mathbf{i} - \sin 45^\circ \mathbf{k}\} \text{ N} \\ &= \{141,4 \mathbf{i} - 141,4 \mathbf{k}\} \text{ N} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_3 = \{100 \mathbf{j}\} \text{ N}$$

$$\mathbf{r}_1 = \{0,5 \mathbf{i}\} \text{ m}, \quad \mathbf{r}_2 = \{1,1 \mathbf{i}\} \text{ m}, \quad \mathbf{r}_3 = \{1,9 \mathbf{i}\} \text{ m}$$

Tekil momentler;

$$\mathbf{M}_{T1} = \{100 \mathbf{k}\} \text{ N}\cdot\text{m}$$

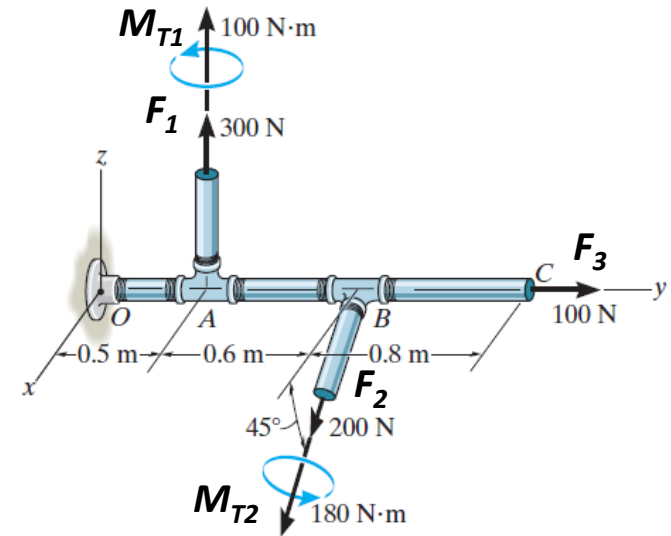
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{T2} &= 180\{\cos 45^\circ \mathbf{i} - \sin 45^\circ \mathbf{k}\} \text{ N}\cdot\text{m} \\ &= \{127,3 \mathbf{i} - 127,3 \mathbf{k}\} \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Örnek-4

•Çözüm:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{RO} &= \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\ &= \{300 \mathbf{k}\} + \{141,4 \mathbf{i} - 141,4 \mathbf{k}\} + \{100 \mathbf{j}\} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_{RO} = \{141 \mathbf{i} + 100 \mathbf{j} + 159 \mathbf{k}\} \text{ N}$$



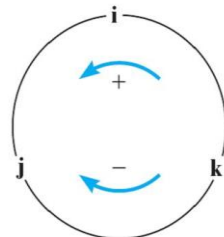
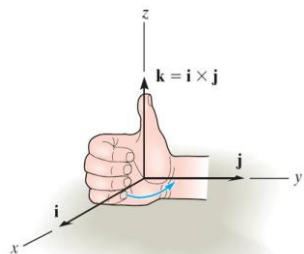
$$\mathbf{M}_{RO} = \sum \mathbf{M}_T + \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$$

$$\mathbf{M}_{RO} = \{100 \mathbf{k}\} + \{127,3 \mathbf{i} - 127,3 \mathbf{k}\}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1,1 & 0 \\ 141,4 & 0 & -141,4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1,9 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{RO} = \{122 \mathbf{i} - 183 \mathbf{k}\} \text{ N·m}$$

Hatırlatma



$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}$$

Örnek-5

•**Soru:** Şekilde verilen mühendislik elemanına etkiyen kuvvetleri O noktasındaki eşdeğer kuvvet ve moment sistemine indirgeyiniz.

•**Çözüm:** Sistem düzlemsel (x-y üzerinde) olduğundan skaler hesap yapılabilir. Bu durumda moment eksenleri k (z-ekseni) türünden olacaktır.

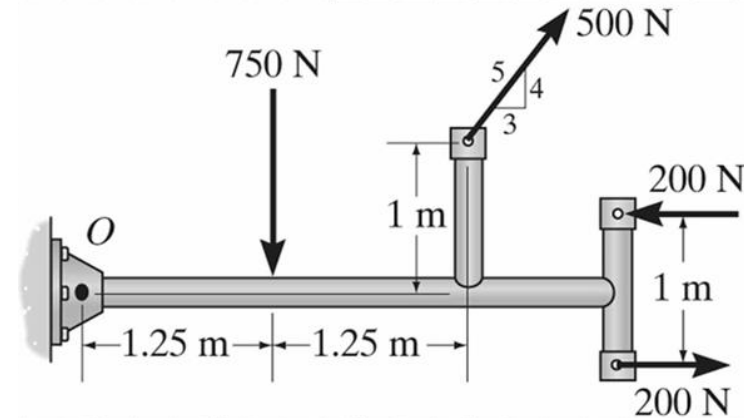
$$+\rightarrow (F_R)_x = \Sigma F_x; (F_R)_x = \left(\frac{3}{5}\right) (500 \text{ N}) = 300 \text{ N} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; (F_R)_y = (500 \text{ N})\left(\frac{4}{5}\right) - 750 \text{ N} = -350 \text{ N} = 350 \text{ N} \downarrow$$

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2}$$

$$= \sqrt{(300 \text{ N})^2 + (350 \text{ N})^2} = 461 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{350 \text{ N}}{300 \text{ N}}\right) = 49.4^\circ$$

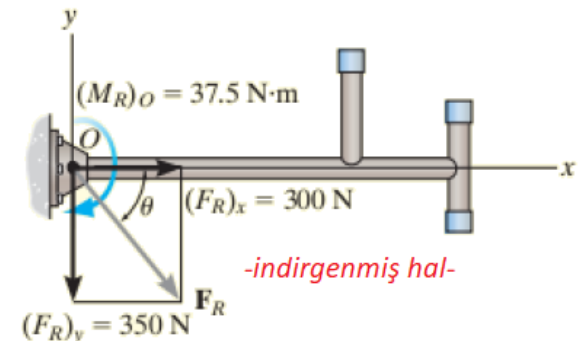


$$\zeta + (M_R)_O = \Sigma M_O + \Sigma M$$

$$(M_R)_O = (500 \text{ N})\left(\frac{4}{5}\right)(2.5 \text{ m}) - (500 \text{ N})\left(\frac{3}{5}\right)(1 \text{ m})$$

$$- (750 \text{ N})(1.25 \text{ m}) + 200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$= -37.5 \text{ N} \cdot \text{m} = 37.5 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$$



Örnek-6

•**Soru:** Şekilde verilen mühendislik elemanına etkiyen kuvvet sistemini (iki kuvvet + moment) O noktasında eşdeğer kuvvet ve moment sistemine indirgeyiniz.

•**Çözüm:** Sistem üç boyutta olduğundan Kartezyen vektör analizi ile çözüm daha kolaydır.

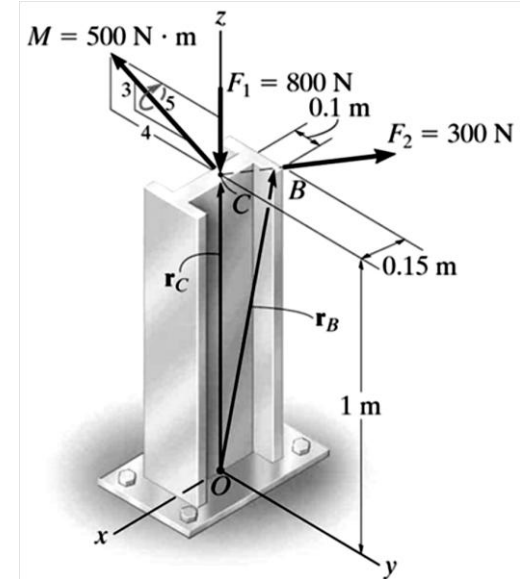
$$\mathbf{F}_1 = \{-800\mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_2 = (300 \text{ N})\mathbf{u}_{CB}$$

$$= (300 \text{ N})\left(\frac{\mathbf{r}_{CB}}{r_{CB}}\right)$$

$$= 300 \text{ N} \left[\frac{\{-0.15\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j}\} \text{ m}}{\sqrt{(-0.15 \text{ m})^2 + (0.1 \text{ m})^2}} \right] = \{-249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j}\} \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R &= \Sigma \mathbf{F}; & \mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -800\mathbf{k} - 249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j} \\ & & &= \{-250\mathbf{i} + 166\mathbf{j} - 800\mathbf{k}\} \text{ N} \end{aligned}$$



$$\mathbf{M} = -500\left(\frac{4}{5}\right)\mathbf{j} + 500\left(\frac{3}{5}\right)\mathbf{k} = \{-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$$

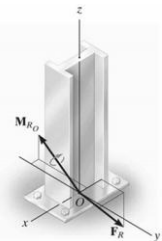
$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma \mathbf{M} + \Sigma \mathbf{M}_O$$

$$\mathbf{M}_{R_O} = \mathbf{M} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{M}_{R_O} = (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (1\mathbf{k}) \times (-800\mathbf{k}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.15 & 0.1 & 1 \\ -249.6 & 166.4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (\mathbf{0}) + (-166.4\mathbf{i} - 249.6\mathbf{j})$$

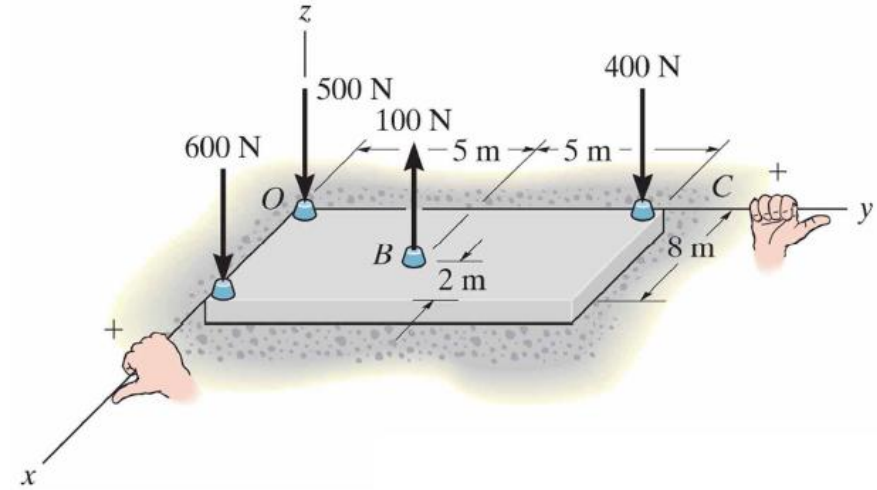
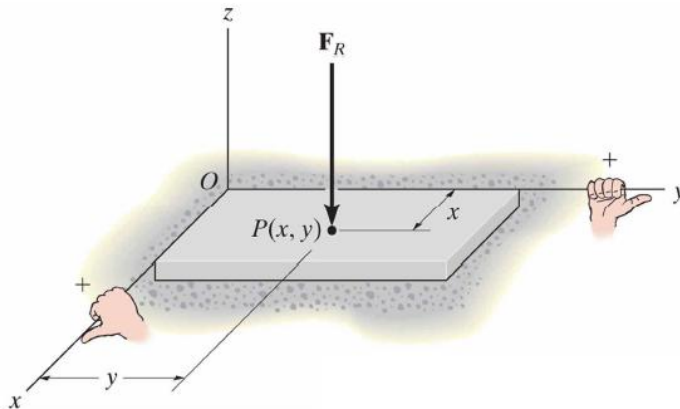
$$= \{-166\mathbf{i} - 650\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$$



Örnek-7

•**Soru:** Şekilde verilen düzlem eleman birbirine paralel kuvvetlerin etkisindedir. Eşdeğer tekil kuvvetin yönünü ve konumunu bulunuz.

•**Çözüm:** Aşağıdaki gibi bir F_R bileşke kuvveti bulunur ve eksenlerden uzaklığı tespit edilir. x eksenine ve y eksenine göre F_R bileşke kuvvetinin yaratacağı moment, o etkiyen kuvvetlerin o doğrultuda tek tek yaratacağı momentler toplamına eşit olmalıdır.



$$+\rightarrow \Sigma F_{Rx} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_{Ry} = -600\text{ N} - 500\text{ N} + 100\text{ N} - 400\text{ N} = -1400\text{ N}$$

$$+\curvearrowleft M_{Rx} = -1400(y) = 100(5) - 400(10)$$

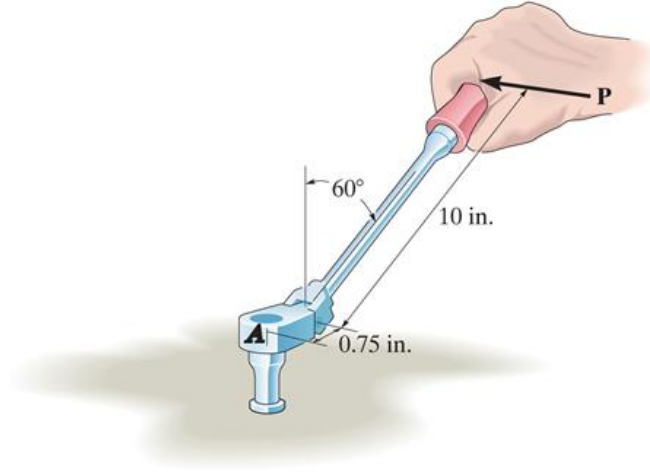
$$y = 2,5\text{ m}$$

$$+\curvearrowleft M_{Ry} = -1400(x) = +600(8) - 100(6)$$

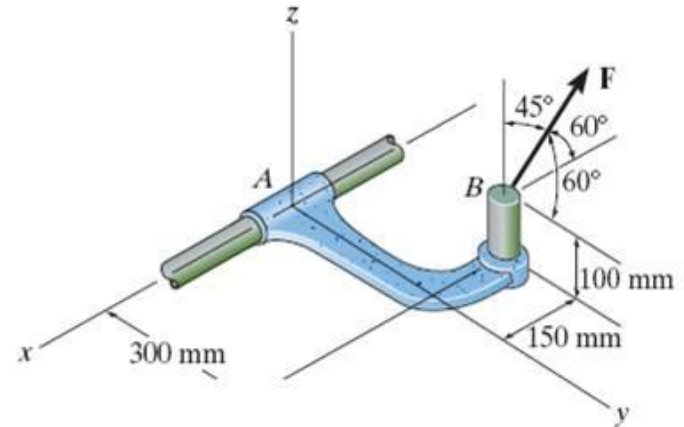
$$x = 3,0\text{ m} \quad \Rightarrow \quad P(3, 2,5)$$

Bir kuvvetin bir eksene göre momenti

- Bir kişi, P kuvveti uygulayarak bu açılı duran civata anahtarı sayesinde A noktası üzerinde bir M_A momenti oluşturmaktadır. M_A momentinin gerçekten tamamı bu civatayı döndürmeye çalışmakta mıdır? Bu soru için bir çözümü nasıl hesaplarız?



- Bu dirseğin A manşonu x eksenine etrafında en fazla 125 N.m'lik bir momente karşı koyabilmektedir. x eksenine etrafında dönüş yaratmayacak en büyük F kuvveti nasıl hesaplanır?



Bir kuvvetin bir eksene göre momenti-*Skaler Analiz*

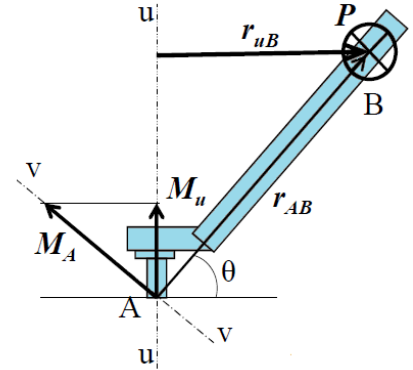
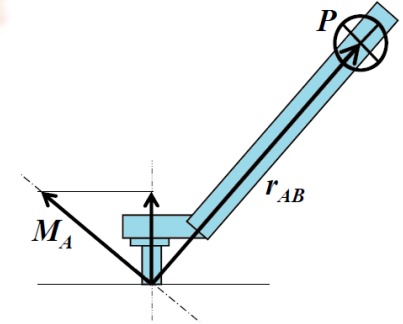
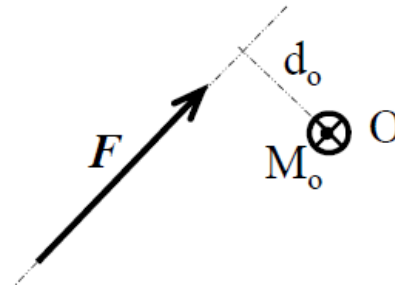
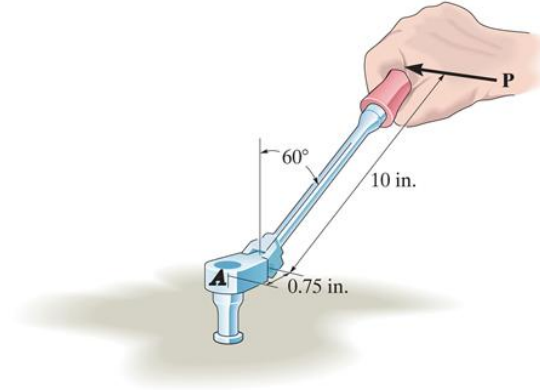
- Skaler bir F kuvvetinin herhangi bir O noktasında oluşturacağı moment; $M_O = F d_O$ ile bulunur. Burada d_O , O noktasından kuvvetin etki çizgisine uzanan en kısa (dik) mesafedir.
- Dolayısıyla, bir kuvvetin bir eksen etrafındaki momentini bulma, önceki sayfalarda ele alınan soruların çözümüne yardımcı olabilir.



"Sayfa düzleminin dışarı doğru"

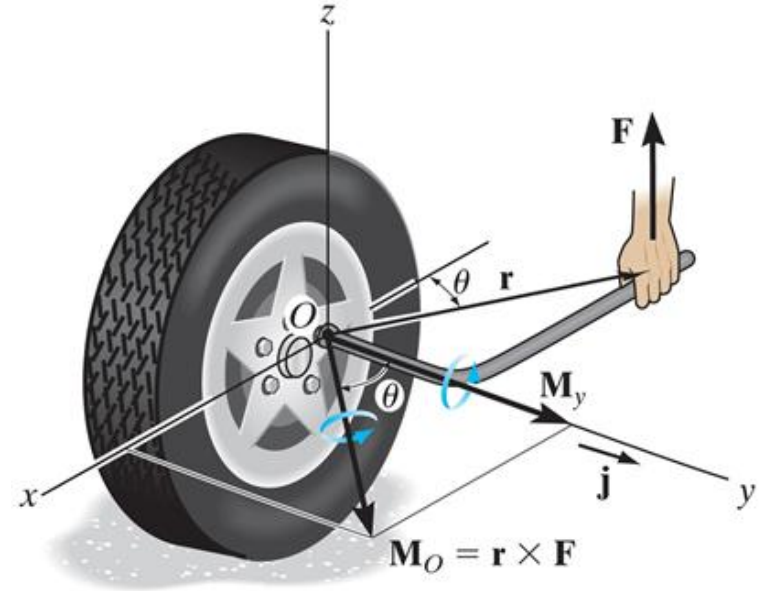


"Sayfa düzleminin içeri doğru"



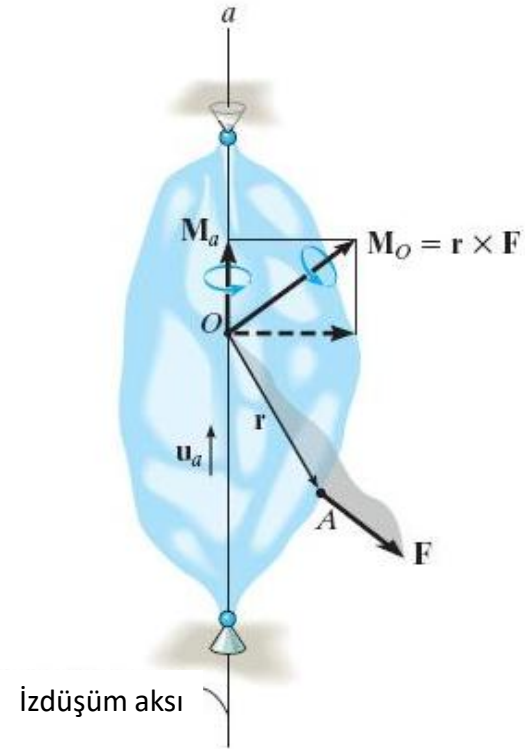
Bir kuvvetin bir eksene göre momenti-*Skaler Analiz*

- Şekilde verilen durumda y-ekseni etrafındaki moment $M_y = F_z (d_x) = F (r \cos \theta)$ büyüklüğünde oluşur. Eğer kuvvet kolayca bileşenlerine ayrılmadıkça ve “ d_x ” hızlı bir şekilde bulunamadıkça bu tür hesaplar çok basit olmayabilir. Böyle bir duruma karşı Vektörel Analiz işimizi kolaylaştırır, hata yapma ihtimalimizi azaltır.



Bir kuvvetin bir eksene göre momenti-*Vektörel Analiz*

- Amacımız yandaki şekilde verilen **F** kuvvetinin a-ekseni etrafındaki momentini (cismi a-ekseni etrafında döndürme etkisini) bulmak olsun.
- Çapraz çarpım yöntemiyle a-ekseni üzerindeki herhangi bir O noktasında oluşan moment kolayca şu şekilde **$M_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$** ile bulabiliriz.
- Daha sonra **M_O** 'nın a-ekseni doğrultusundaki bileşenini skaler çarpım (nokta çarpım) ile bulabiliriz. **$M_a = \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{M}_O$**



Üçlü skaler çarpım:

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} u_{ax} & u_{ay} & u_{az} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$\mathbf{u}_a$, a eksenini üzerindeki birim vektörü,
 $\mathbf{r}$, a eksenini üzerindeki herhangi bir noktadan kuvvetin etki çizgisi üzerindeki herhangi bir A noktasına olan konum vektörünü
 $\mathbf{F}$ ise kuvvet vektörünü temsil etmektedir.

Bir kuvvetin bir eksene göre momenti-*Vektörel Analiz*

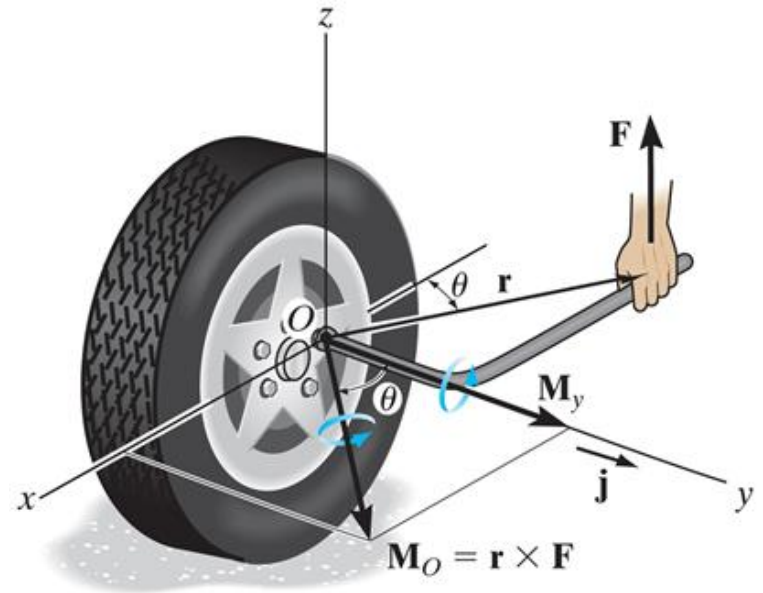
- Şekilde gösterilen F kuvvetinin y eksenine göre momentini bulmak için önce, F kuvvetinin y ekseninde herhangi bir O noktasına göre momentini bulunur:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

- M_O momentinin y eksenine izdüşümü olan M_y bileşeni (y eksenine etrafındaki moment) ise skaler çarpım kullanılarak bulunur. Sonuç pozitif ise $+j$ yönü elde edilir.

$$M_y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

$$\mathbf{M}_y = M_y \mathbf{j}$$



Örnek-1

•**Soru:** Şekilde görünen anahtar üzerine bir kuvvet uygulanmaktadır. Bu kuvvetin x-ekseni üzerindeki momentinin büyüklüğü hesaplayınız.

•**Çözüm:**

$M_z = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ bulunur.

$\mathbf{F}$ kuvvet vektörü Kartezyen formda ifade edilir.

Bu problemde $\mathbf{u} = 1 \mathbf{i}$ olduğuna dikkat edelim.

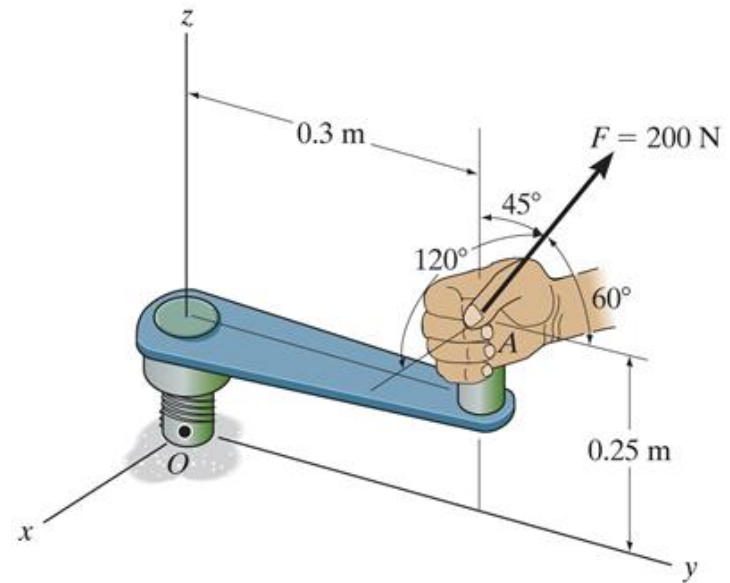
$\mathbf{r}$ vektörü O'dan A'ya doğru olan konum vektörüdür.

$$\mathbf{u} = 1 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}_{OA} = \{0 \mathbf{i} + 0,3 \mathbf{j} + 0,25 \mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$\mathbf{F} = 200 (\cos 120 \mathbf{i} + \cos 60 \mathbf{j} + \cos 45 \mathbf{k}) \text{ N}$$

$$= \{-100 \mathbf{i} + 100 \mathbf{j} + 141,4 \mathbf{k}\} \text{ N}$$



$$M_z = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F})$$

$$M_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,25 \\ -100 & 100 & 141,4 \end{vmatrix}$$

$$= 1\{0,3 (141,4) - 0,25 (100)\} \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\underline{M_z = 17,4 \text{ N}\cdot\text{m} \text{ saat yönü tersi}}$$

$$(\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F} = \{17,4 \mathbf{i} - 25 \mathbf{j} - 30 \mathbf{k}\} \text{ N}\cdot\text{m}, M_x = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_O = 17,4 \text{ N}\cdot\text{m})$$

+x yönündeki
birim vektör

Örnek-1

•**Soru:** $F = 30$ N'luk bir kuvvet A noktasından dirseğe etmektedir ($\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$). F kuvvetinin a-a aksında yarattığı momenti hesaplayınız.

•**Çözüm:**

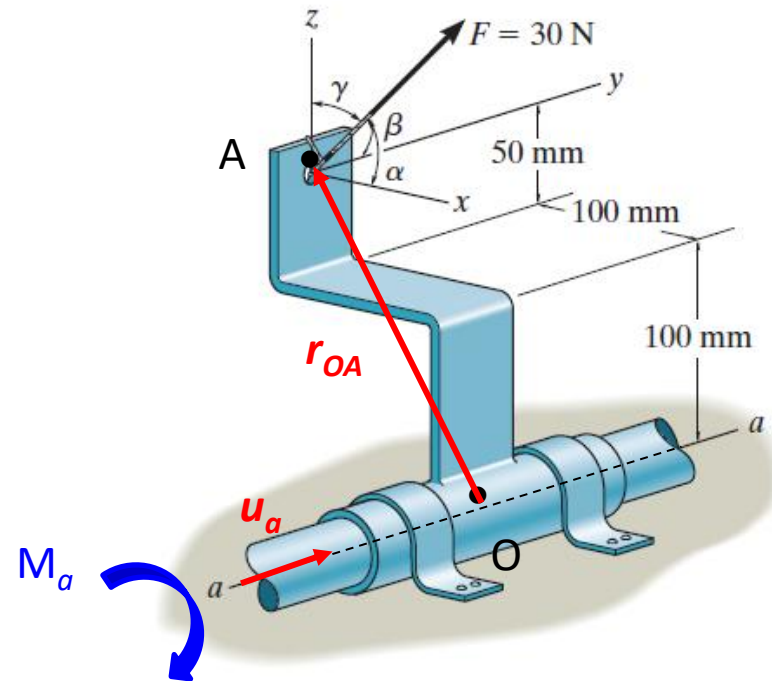
- 1) u_a (birim vektör) r_{OA} (konum vektörü) bulunur.
- 2) F Kartezyen vektör formunda ifade edilir.
- 3) $M_a = u_a \cdot (r_{OA} \times F)$ üçlü skaler çarpımı yapılır.

$$u_a = j$$

$$r_{OA} = \{-0,1 i + 0,15 k\} \text{ m}$$

$$F = 30 \{\cos 60^\circ i + \cos 60^\circ j + \cos 45^\circ k\} \text{ N}$$

$$F = \{15 i + 15 j + 21,21 k\} \text{ N}$$



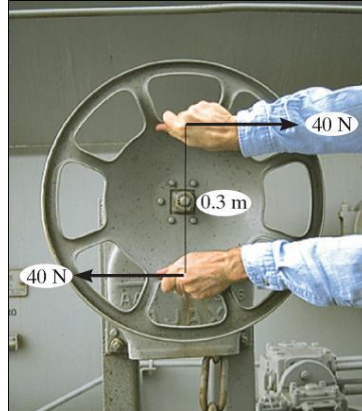
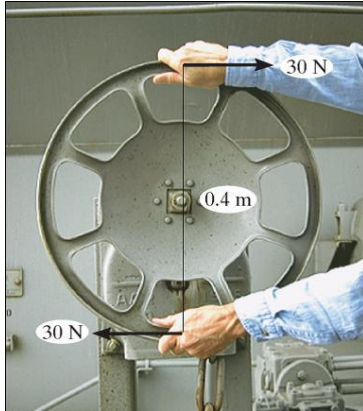
$$M_a = u_a \cdot (r_{OA} \times F)$$

$$M_a = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0,15 \\ 15 & 15 & 21,21 \end{vmatrix} \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_a = -1 \{-0,1 (21,21) - 0,15 (15)\} = \underline{4,37 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

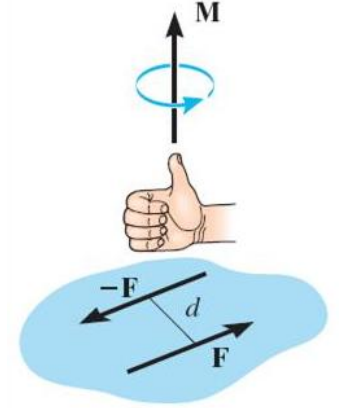
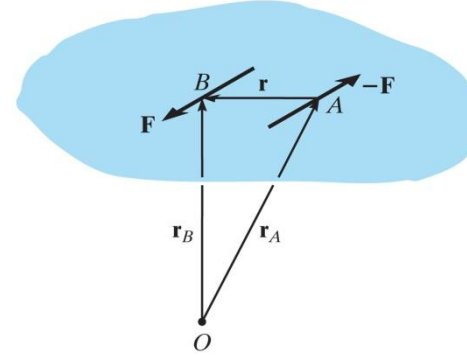
Kuvvet Çiftinin Momenti

- Aşağıdaki çarkı döndürmek için 12 N.m'lik bir tork veya moment gerekmektedir. Çark üzerindeki iki tutma konumundan neden birinde diğerine göre daha küçük kuvvet yeterli olur?
- Aşağıdaki çarkı döndürmek için 12 N.m'lik bir tork veya moment gerekmektedir. Çark üzerindeki iki tutma konumundan neden birinde diğerine göre daha küçük kuvvet yeterli olur? Hidrolik olmayan direksiyonlar neden daha büyüktür?



Bir Kuvvet Çiftinin Momenti

- Bir kuvvet çifti, “d” dik mesafesi ile birbirinden ayrılmış aynı büyüklükte fakat zıt yönde etkiyen iki paralel kuvvet olarak tanımlanır.



Bir kuvvet çiftinin momenti;

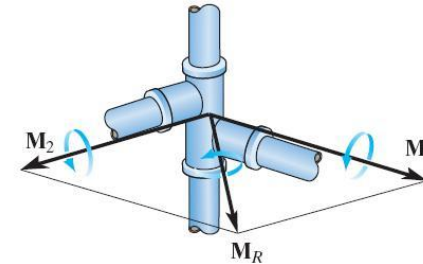
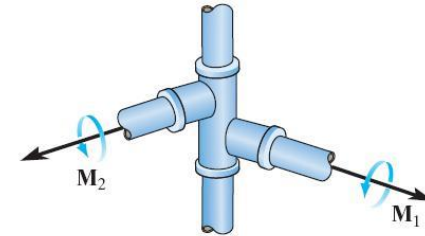
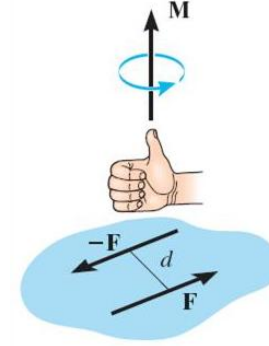
$$M_O = F d \text{ (skaler analiz) veya}$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \text{ (vektörel analiz) şeklinde bulunur.}$$

Burada $\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$ 'in tesir çizgisi üzerindeki herhangi bir noktadan diğer $\mathbf{F}$ 'in tesir çizgisine uzanan konum vektörüdür.

Bir Kuvvet Çiftinin Momenti

- Bir kuvvet çiftinin net dış etkisi, net kuvvetin sıfıra, net momentin büyüklüğünün $F \cdot d$ 'ye eşit olmasıdır.
- Bir kuvvet çiftinin momenti, sadece kuvvetlerin arasındaki mesafeye bağlı olduğundan, kuvvet çiftinin momenti serbest vektördür. Cismin üzerindeki herhangi bir noktaya taşınabilir ve her durumda cisme olan dış etkisi aynıdır.
- Kuvvet çiftlerinden oluşan momentler birbiriyle toplanabilir, toplama kuralları ise genel olarak vektörlerin toplanması ile aynıdır.

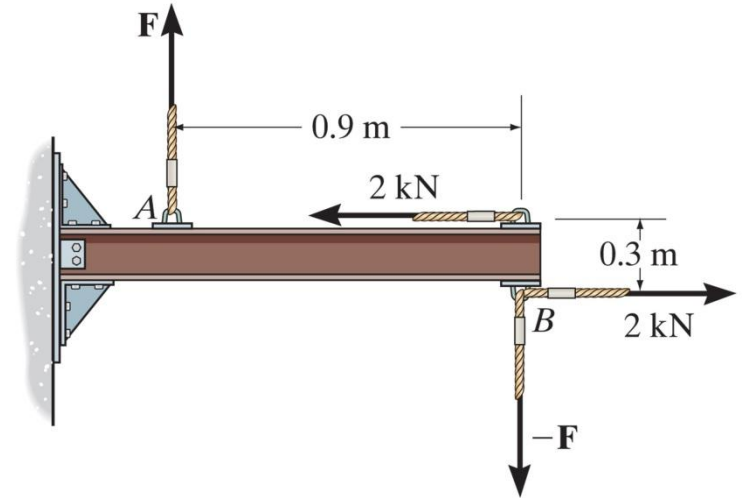


Örnek-1

•**Soru:** İki kuvvet çifti verilen geometri ile şekildeki çelik kirişe etkimektedir. Kuvvet çiftlerinden dolayı oluşan momentlerin bileşkesinin saat yönünde 1.5 kN.m olması için F 'in büyüklüğü ne olmalıdır?

•**Çözüm:**

Kuvvet çiftlerinden dolayı oluşan momentlerin bileşkesinin saat yönünde 1.5 kN.m olması için F 'in büyüklüğü tespit edilir.



Net moment eşitliği yazılır;

$$\begin{aligned} + \sum M &= -F(0,9) + (2)(0,3) \\ &= -0,9F + 0,6 \end{aligned}$$

$$-1.5 \text{ kN}\cdot\text{m} = -0,9F + 0,6$$

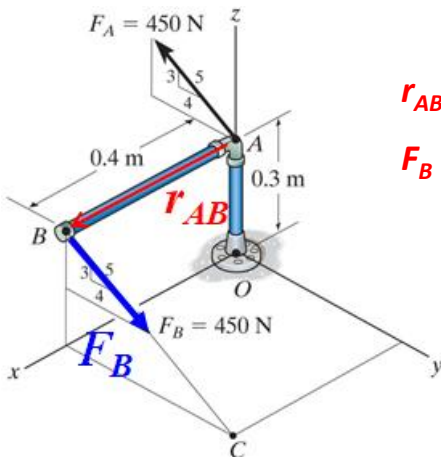
Eşitlik çözüldüğünde $F = 2,33 \text{ kN}$

Örnek-2

•**Soru:** Dirsek şeklindeki boruya 450 N'luk bir kuvvet çifti etkimektedir. Oluşan momenti kartezyen vektör formunda ifade ediniz.

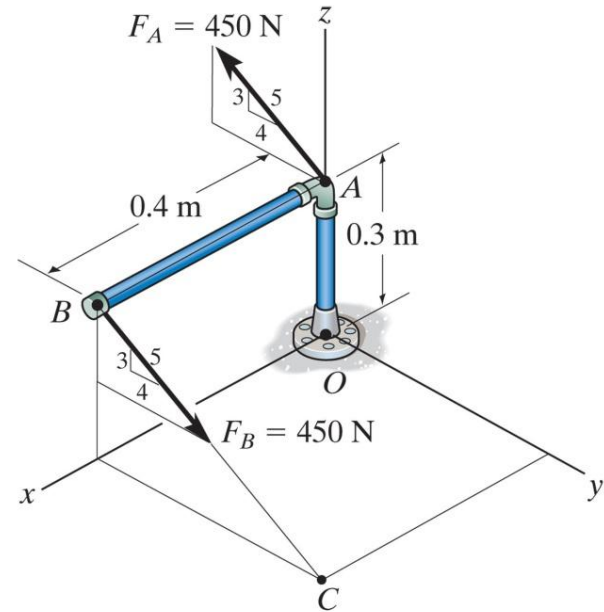
•**Çözüm:**

- 1) $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ile kuvvet çiftinin momenti bulunur.
- 2) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{AB}$ ve $\mathbf{F} = \mathbf{F}_B$ olarak seçilir.
- 3) Çapraz (vektörel) çarpım ile $\mathbf{M}$ bulunur.



$$\mathbf{r}_{AB} = \{0,4 \mathbf{i}\} \text{ m}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_B &= \{0 \mathbf{i} + 450(4/5) \mathbf{j} - 450(3/5) \mathbf{k}\} \text{ N} \\ &= \{0 \mathbf{i} + 360 \mathbf{j} - 270 \mathbf{k}\} \text{ N}\end{aligned}$$



$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_B$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 360 & -270 \end{vmatrix} \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned}&= [\{0(-270) - 0(360)\} \mathbf{i} - \{4(-270) - 0(0)\} \mathbf{j} \\ &\quad + \{0,4(360) - 0(0)\} \mathbf{k}] \text{ N}\cdot\text{m} \\ &= \{0 \mathbf{i} + 108 \mathbf{j} + 144 \mathbf{k}\} \text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

Örnek-3

•**Soru:** Şekildeki ahşap sisteme etkiyen kuvvet çiftlerinin bileşke momentini bulunuz.

•**Çözüm:**

- 1) Kuvvetler x ve y bileşenlerine ayrılır (skaler çözüm).
- 2) Kuvvet çiftlerinin momentleri yönlerine göre toplanır.

Altındaki 80N'luk kuvvet için;

$(80 \text{ N}) (3/5) = 48 \text{ N}$, +y yönünde etkir. (moment yaratmaz)

$(80 \text{ N}) (4/5) = 64 \text{ N}$, +x yönünde etkir. (moment yaratır)

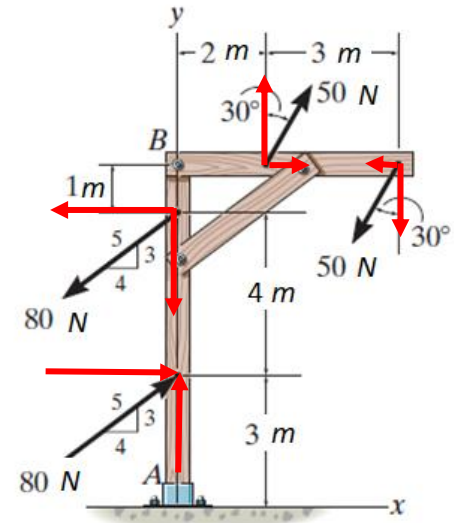
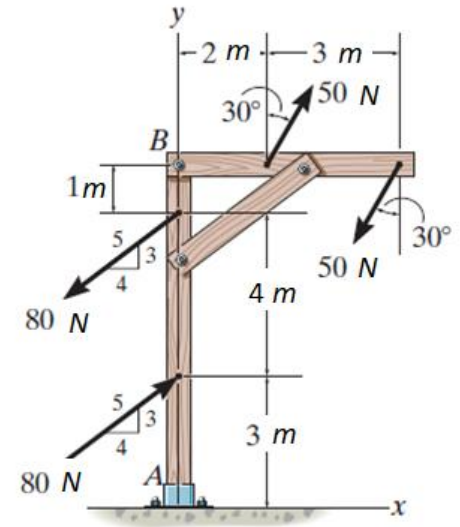
Soldaki 50N'luk kuvvet için;

$(50 \text{ N}) (\cos 30^\circ) = 43,3 \text{ N}$ +y yönünde etkir. (moment yaratır)

$(50 \text{ N}) (\sin 30^\circ) = 25 \text{ N}$ +x yönünde etkir. (moment yaratmaz)

$$+ \Sigma M = - (43,3 \text{ N})(3 \text{ m}) + (64 \text{ N})(4 \text{ m})$$

$$= - 129,9 + 256 = \underline{126 \text{ Nm saat yönü tersi}}$$

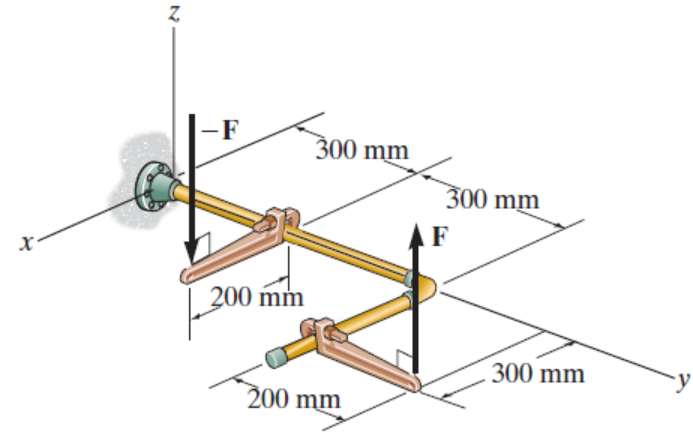
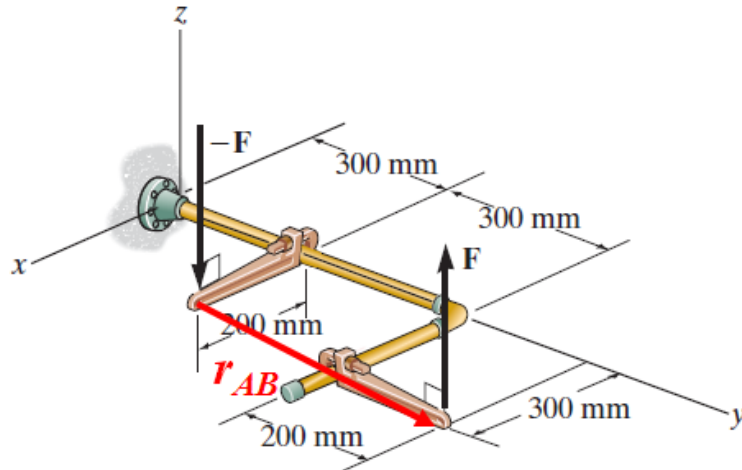


Örnek-4

•**Soru:** Boruya etkiyen kuvvet çifti momentini Kartezyen formda ifade ediniz (F kuvvetinin büyüklüğü=80 N).

•**Çözüm:**

- 1) $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ile kuvvet çifti momentini bulunur (vektörel çözüm).
- 2) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{AB}$ ve $\mathbf{F} = \{80 \mathbf{k}\}$ N seçilsin.
- 3) Çapraz çarpım ile $\mathbf{M}$ tespit edilir. .



$$\mathbf{r}_{AB} = \{ (0,3 - 0,2) \mathbf{i} + (0,8 - 0,3) \mathbf{j} + (0 - 0) \mathbf{k} \} \text{ m}$$

$$= \{ 0,1 \mathbf{i} + 0,5 \mathbf{j} \} \text{ m}$$

$$\mathbf{F} = \{80 \mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{vmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$= \{ (40 - 0) \mathbf{i} - (8 - 0) \mathbf{j} + (0) \mathbf{k} \} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$= \{ 40 \mathbf{i} - 8 \mathbf{j} \} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Faydalanılan kaynaklar:

Mühendislik Mekaniği - Statik, R.C. Hibbeler, S.C. Fan

(Mühendislik Mekaniği – Statik’in Pearson yayınevi tarafından hazırlanan İngilizce sunumları)

Kisi.deu.edu.tr/serkan.misir (Pearson yayınevi tarafından hazırlanan sunumların Türkçe çevirisi)