STATİK

(MADEN MÜHENDİSLİĞİ)

Dr. Öğr. Üyesi Çağlar YALÇINKAYA

(Dokuz Eylül Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü)

Ders notları için: www.caglaryalcinkaya.com

AĞIRLIK MERKEZİ-KÜTLE MERKEZİ-GEOMETRİK MERKEZ

Tarihi Su Deposu (1895)– Delft / Hollanda

İzmir- TMO Siloları

•Bir su tankını veya hububat silosunu ayakta tutan yapıyı tasarlamak için, tankın ve malzemenin (su/hububat) ağırlığının yanında, etkiyen yayılı kuvvetleri temsil eden bileşke kuvvetin konumunu da bilmemiz gerekmektedir. Bileşke ağırlıkları ve etkidikleri hatları nasıl tespit ederiz?

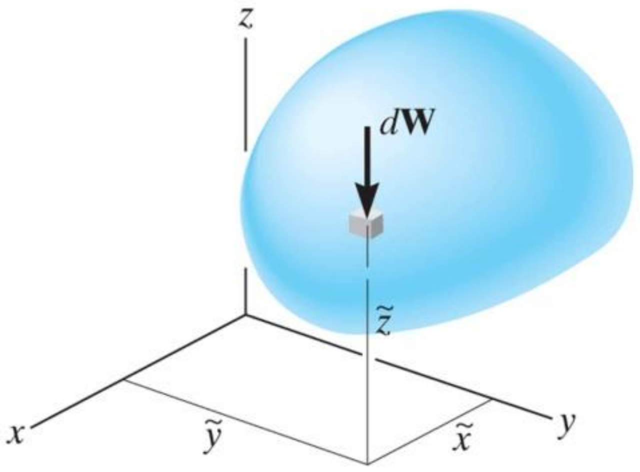
Ağırlık Merkezi Kavramı (G)

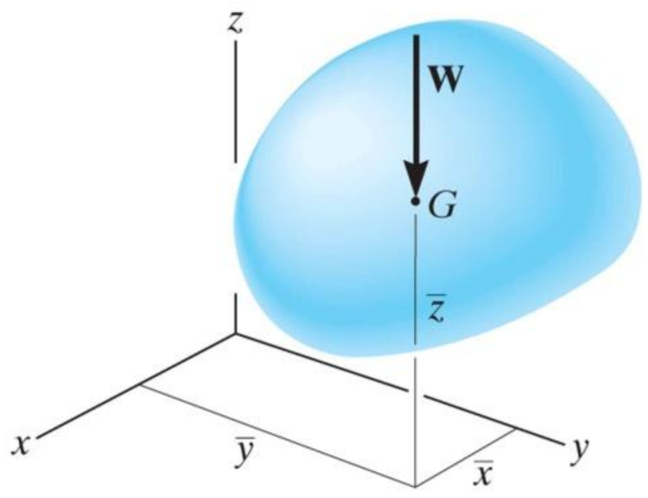
- Bir cisim sonsuz sayıda parçacıktan oluşur ve eğer cisim yerçekimi etkisi altındaysa bu her bir parçacık dW ağrılığına sahip olacaktır.

- Genellikle **G** ile gösterilen ağırlık merkezi, parçacıklar sisteminin veya katı bir cismin ağırlık bileşkesinin konumunu göstermektedir.

- Bileşke kuvvet tanımından, her bir parçacığın bir noktaya göre momentlerinin toplamı, G noktasındaki bileşke ağırlığın o nokta etrafındaki momentine eşittir.

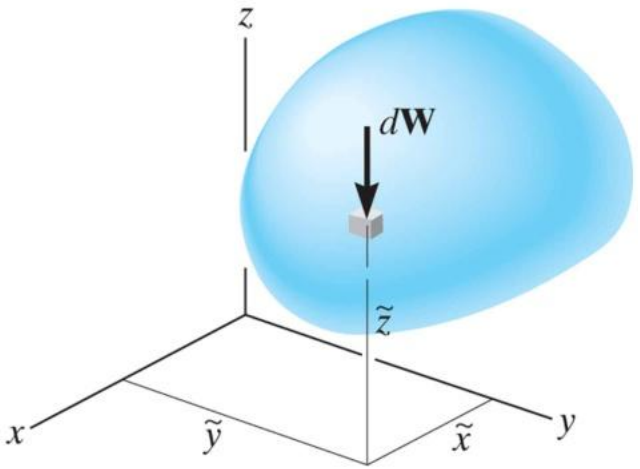
- Ayrıca, her bir parçacığın ağırlıkları sebebiyle G noktası etrafındaki momentlerinin toplamı da sıfır olmaktadır.





Ağırlık Merkezi Kavramı (G)

•Ağırlık merkezinin y ekseninden ölçülen mesafesi x, W ağırlığının y ekseni etrafındaki momenti ile cismi oluşturan parçacıkların her birinin (dW) ağırlığının yine y eksenine göre momentlerinin toplamına eşitlenmesi ile elde edilir.

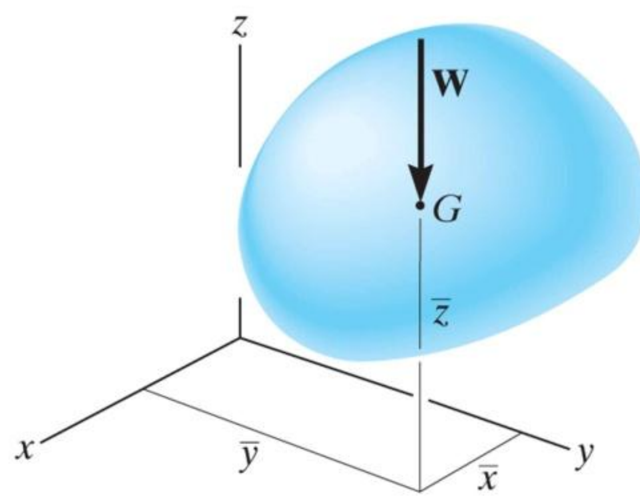


Eğer ***dW*** herhangi bir *(x, y, z) noktasında ise*

$$\bar{x}\,\boldsymbol{W} = \int \tilde{x}\, d\boldsymbol{W}$$

Benzer şekilde,

$$\bar{y}\,\boldsymbol{W} = \int \tilde{y}\, d\boldsymbol{W} \qquad \bar{z}\,\boldsymbol{W} = \int \tilde{z}\, d\boldsymbol{W}$$



x, y ve z eksenlerine göre G ağırlık merkezinin konumu;

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dW}{\int dW}$$

Kütle Merkezi ve Geometrik Merkez

•Bu denklemlerde W yerine m ile yerleştirilirse, kütle merkezinin koordinatları bulunabilir.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dW}{\int dW}$$

•Aynı şekilde, bir hacmin, alanın veya uzunluğun geometrik merkezleri W yerine sırasıyla V, A ve L yerleştirilerek bulunabilir.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dm}{\int dm} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dm}{\int dm}$$

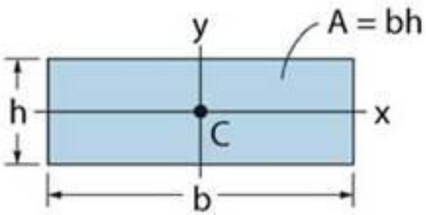
Geometrik Merkez Kavramı

•C, cismin geometrik merkezini gösteren noktadır.

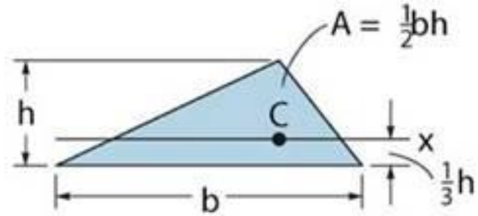
• Cismin homojen (her yerinde aynı yoğunluğa sahip) bir malzemeden üretilmiş ise geometrik merkez, ağırlık ve kütle merkezleri çakışır.

• Cismin bir simetri ekseni varsa geometrik merkez bu eksen üzerinde yer alır (örneğin dikdörtgen alan).

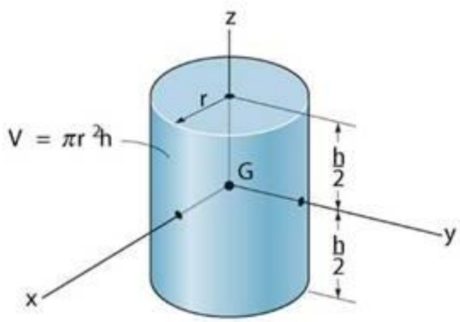
•Bazı durumlarda ise geometrik merkez cisim üzerinde yer almaz (örneğin yay, halka, U ve C şekilli cisimler).



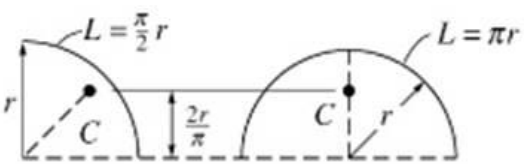
Dikdörtgen alan



Üçgen alan

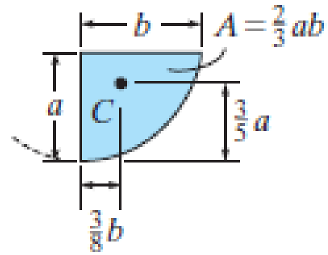


Silindir Hacim

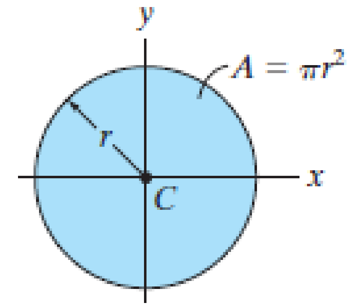


Çeyrek ve yarım yay

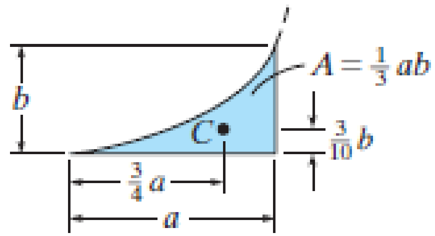
Temel Şekillere Ait Geometrik Merkezler



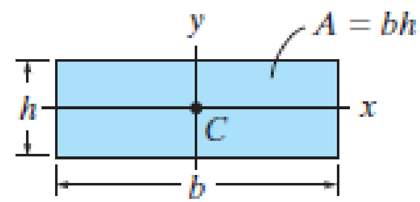
Yarı parabolik alan



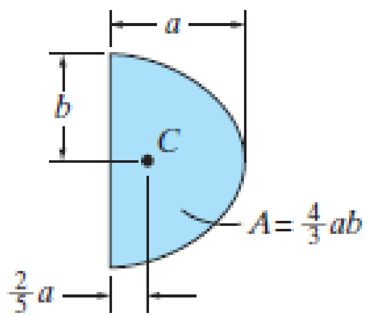
Dairesel alan



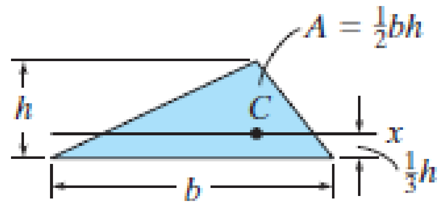
Parabol dışı alan



Dikdörtgen alan

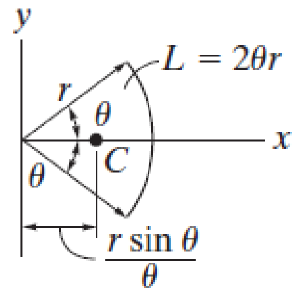


Parabolik alan

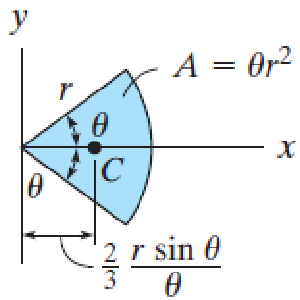


Üçgen alan

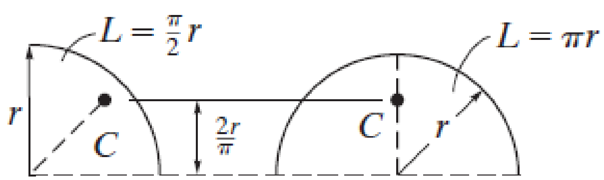
Temel Şekillere Ait Geometrik Merkezler



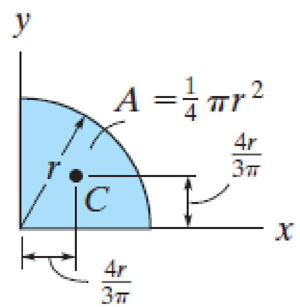
Dairesel yay eleman



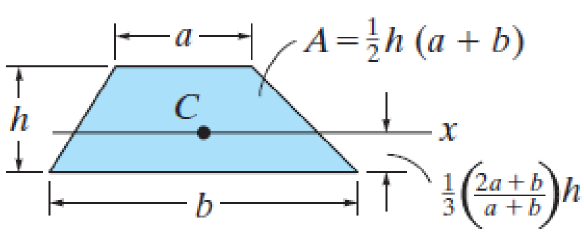
Daire dilimi alanı



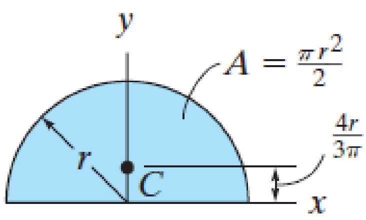
Çeyrek ve yarım yay



Çeyrek daire alanı



Yamuk (trapez) alanı



Yarım daire alanı

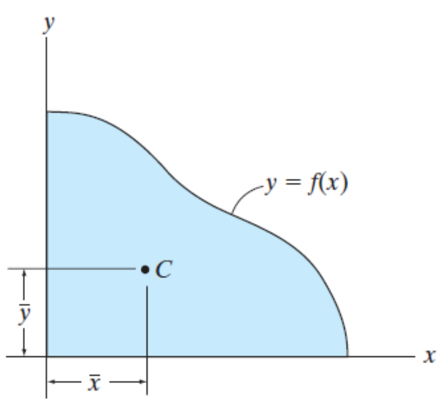
Bir Alanın Geometrik Merkezi İçin İşlem Adımları

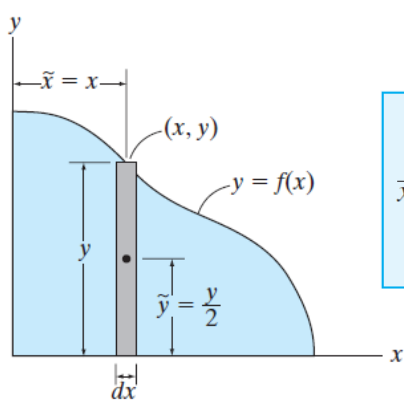
•Eğri üzerindeki genel bir (x,y) noktasına dokunan uygun bir dA diferansiyel alanı seçilir. Eğer y, x cinsinden ifade edilebiliyorsa (örneğin: y = f(x)), dikey bir dikdörtgen parçası ile çalışılır.

•Diferansiyel alan dA, diferansiyel eleman dx cinsinden ifade edilir.

•Dikdörtgen elemanın ağırlık merkezinin $(\tilde{x}, \tilde{y})$ koordinatları, genel nokta (x,y) cinsinden yazılır.

•dA diferansiyel alanlarının y-eksenine göre momentleri toplamı, dA alanları toplamına bölünerek $\bar{x}$, x-eksenine göre momentleri toplamı, dA alanları toplamına bölünerek $\bar{y}$ bulunur.

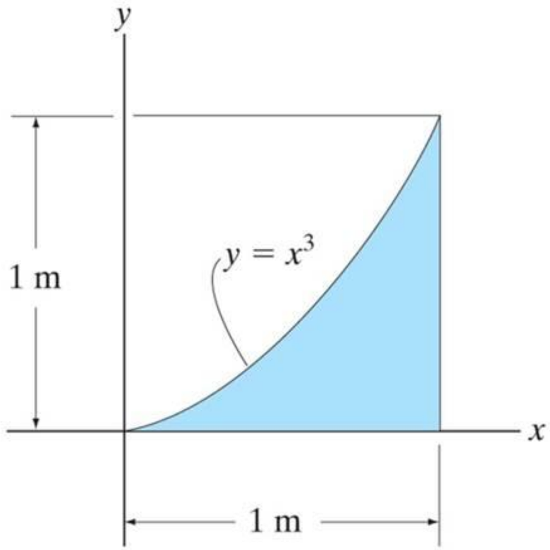




$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA}$$

ÖRNEK-1

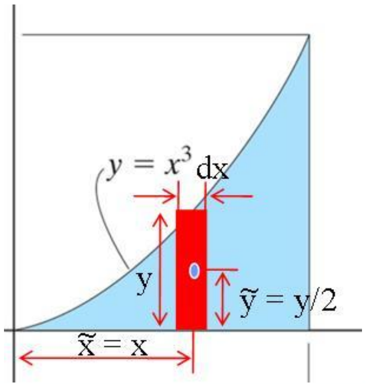
•**Soru:** Şekilde gibi sınırlanan $y=x^3$ eğrisi altında kalan alanın geometrik (alansal) merkezini tespit ediniz.



•**Çözüm:** y, x cinsinden verildiğinden, dA düşey dikdörtgen bir alan olarak seçilir. Sırasıyla dA diferansiyel alanının y eksenine göre momentleri toplamı, diferansiyel alanlar toplamına bölünür, $\tilde{x}$ bulunur. $\tilde{y}$ için de x eksenine göre momentler toplamı, alanlar toplamına bölünür.

$dA = y\,dx = x^3\,dx$

$\tilde{x} = x$ ve $\tilde{y} = y / 2 = x^3 / 2$



$$\bar{x} = \left(\int_A \tilde{x}\,dA\right) / \left(\int_A dA\right)$$

$$= \frac{\int_0^1 x\,(x^3)\,dx}{\int_0^1 (x^3)\,dx} = \frac{1/5\,[\,x^5\,]_0^1}{1/4\,[\,x^4\,]_0^1}$$

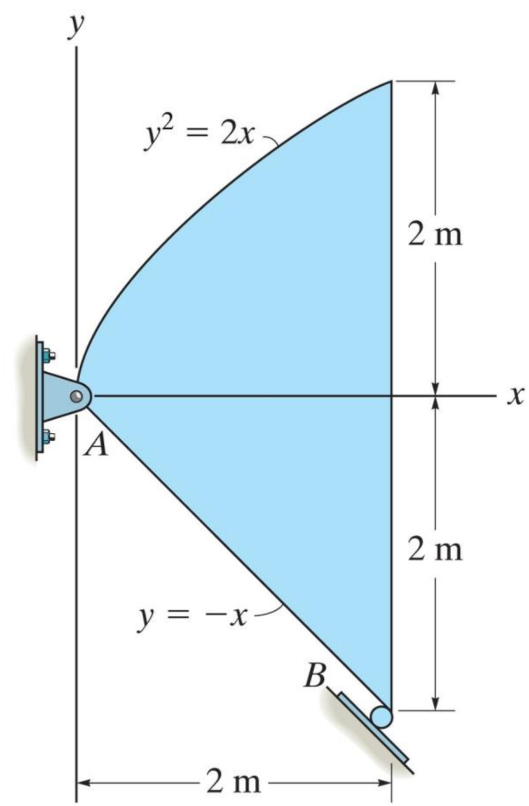
$$= (1/5)/(1/4) = 0.8\ \text{m}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 (x^3/2)\,(x^3)\,dx}{\int_0^1 x^3\,dx} = \frac{1/14[x^7]_0^1}{1/4}$$

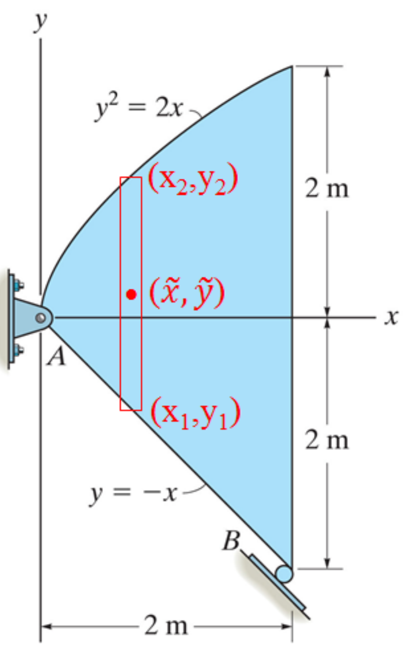
$$= (1/14)/(1/4) = 0.2857\ \text{m}$$

ÖRNEK-2

•**Soru:** Şekildeki çelik plakanın kalınlığı 0,3 m olup, çeliğin yoğunluğu 7850 kg/m^3 'tür. A ve B mesnetlerinin reaksiyonlarını hesaplayınız.



•**Çözüm:** Öncelikle integrasyon ile geometrik (alan) merkezi tespit edilir ve bu merkeze plakanın ağırlı etkitilir. SCD çizilerek mesnet reaksiyonları hesaplanır.



$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^2 x\left(\sqrt{2x}+x\right)dx}{\int_0^2\left(\sqrt{2x}+x\right)dx} = \frac{\left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right]_0^2}{\left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2}$$

$$= \frac{5.867}{4.667} = 1.257\text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^2\left\{\left(\sqrt{2x}-x\right)/2\right\}\left(\sqrt{2x}+x\right)dx}{\int_0^2\left(\sqrt{2x}+x\right)dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2}{\left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2}$$

$$= \frac{0.6667}{4.667} = 0.143\text{ m}$$

ÖRNEK-2

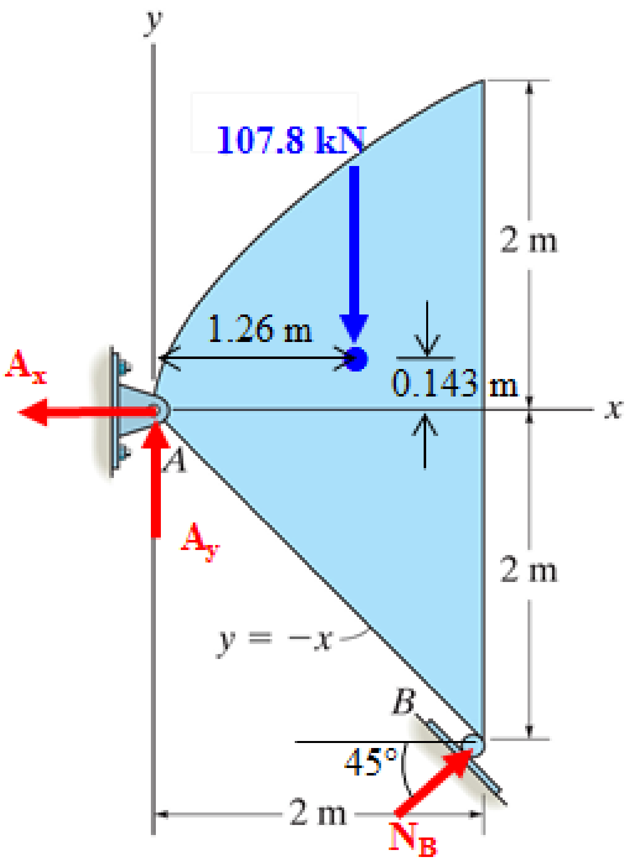
• **Çözüm:**

Plakanın ağırlığı geometrik merkeze (alan merkezi=ağırlık merkezi) etkitilir.

Alan, $A = 4.667\ m^2$

Ağırlık, $W = (7850)\ (9.81)\ (4.667)\ 0.3 = 107.8\ kN$

Sağ tarafta SCD çizilerek sistem çözülebilir hale gelmiştir.



$$+\sum M_A = N_B\,(2\sqrt{2}) - 107.8\,(1.26) = 0$$

$N_B = 47.92 = 47.9\ kN$

$$+\rightarrow \sum F_X = -A_x + 47.92 \sin 45^\circ = 0$$

$A_X = 33.9\ kN$

$$+\uparrow \sum F_Y = A_y + 47.92 \cos 45^\circ - 107.8 = 0$$

$A_Y = 73.9\ kN$

Kompozit Cisimlerin Merkezi

•Üst tarafta, GFRP bir I kiriş ile beton bir tablanın beraber kullanıldığı kompozit bir köprü kirişi görülmektedir.

•Böyle bir kirişin gerilme veya sehim hesabı yapılırken kesitin geometrik merkezinin yeri son derece önemlidir.

•Farklı kiriş şekilleri için geometrik merkezi kolayca elde etmenin yöntemi nedir?

DEÜ İnşaat Mühendisliği Bölümü Yapı Laboratuvarı

Çelik I profil, Kardemir

Kompozit Cisimlerin Merkezi

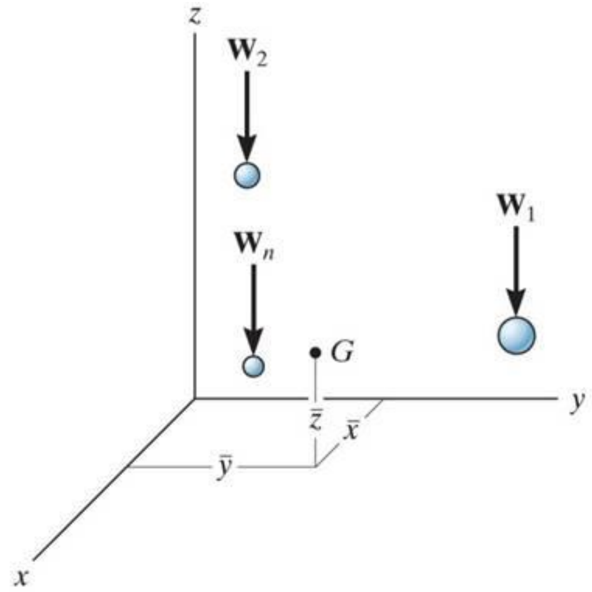
•Şekilde gösterildiği gibi bir seri parçacıktan (veya cisimden) oluşan kompozit bir ele alalım.

•Net veya bileşke ağırlık $W_R = \sum W$ olur.

•y-eksenine göre momentler toplanırsa;

$$\bar{x} W_R = \tilde{x}_1 W_1 + \tilde{x}_2 W_2 + \dots + \tilde{x}_n W_n$$

$\tilde{x}_1$, W_1 cisminin x koordinatıdır.



•Benzer şekilde, ağırlık merkezinin koordinatlarını bulmak için x ve z eksenleri etrafındaki momentler de toplanabilir. Bu denklemlerde W yerine M kullanılarak kütle merkezinin koordinatları da hesaplanabilir.

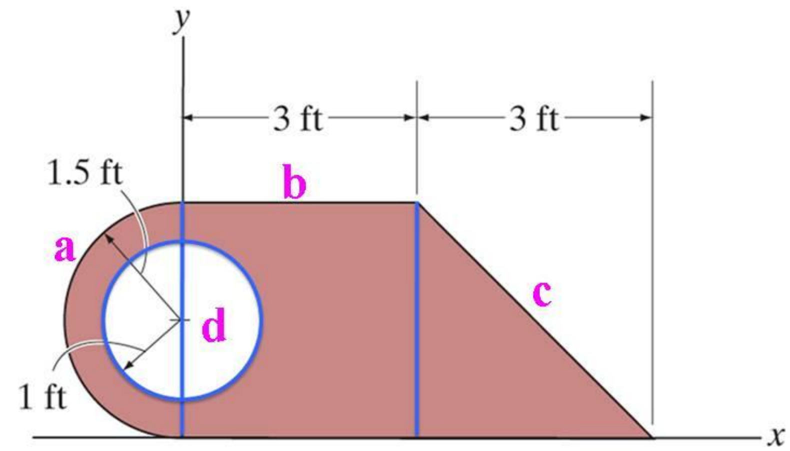
$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} W}{\Sigma W} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} W}{\Sigma W} \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} W}{\Sigma W}$$

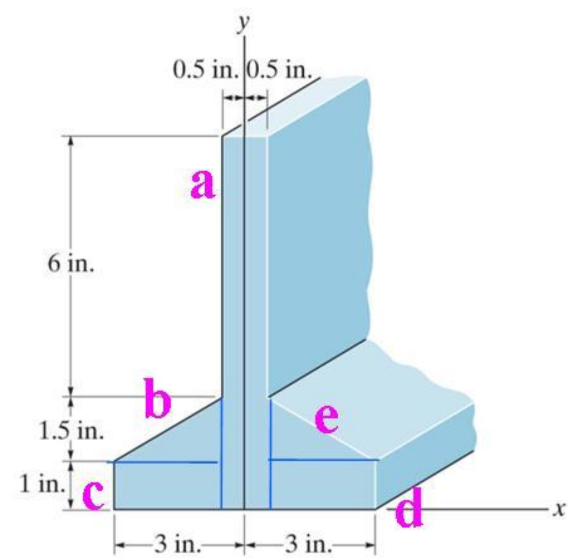
Kompozit Cismin Merkezinin Tespiti İçin İşlem Adımları

•Pek çok endüstriyel nesne, birbirine bağlı bir seri "basit şekilli" parçadan oluşturulmuş kompozit cisim olarak ele alınabilir (bir dikdörtgen, üçgen, yarım daire şekilli plaka veya boşluk vb.).

•Basit şekillerin geometrik merkezinin yeri (C) veya ağırlık merkezinin yeri (G) bilindiğinde, çok daha kompleks kompozit cisimlerin merkezlerini kolayca belirleyebiliriz.

•Her bir geometrik şekli bir parça olarak ele alıp bir sonraki yansıda sıralanan işlem adımlarını takip ederiz;





Kompozit Cisim Kavramı

1. Cisim, bilinen şekle sahip parçalara bölünür. Boşluklar negatif ağırlı veya boyuta sahip parçalar olarak ele alınır.

2. Bir tablo oluşturulur. İlk kolonu basit parçaların numaralarını ikinci kolon (problemin cinsin bağlı olarak) ağırlık, kütle veya boyut, sonraki kolon moment kolu ve son olarak da bazı ara işlemleri kaydetmek için birkaç ilave kolon oluşturulur.

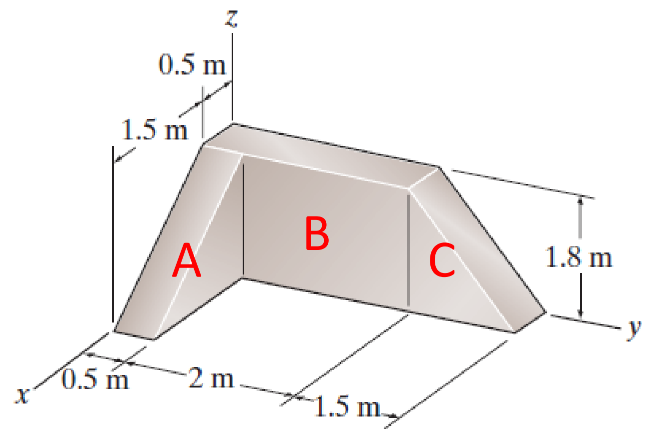
3. Koordinat eksenleri yerleştirilir, her bir parçanın ağrılık veya geometrik merkezinin koordinatlarını hesaplanır ve tablo doldurulur.

4. Kolonlar toplanarak aşağıdaki işlemlerle $\bar{x}$, $\bar{y}$, ve $\bar{z}$ hesaplanır.

$$\bar{x} = (\Sigma \tilde{x}_i A_i) / (\Sigma A_i) \text{ or } \bar{x} = (\Sigma \tilde{x}_i W_i) / (\Sigma W_i)$$

ÖRNEK-1

- **Soru:** Şekildeki üç bloğun birleşiminden oluşan cismin hacim merkezini tespit ediniz.



- **Çözüm:** Bu problemde, A, B ve C blokları üç parça olarak düşünülür. Bu esasa göre çözüm tablosu oluşturulur.

Her bir parçanın hacmi;

$V_A = (0.5)\,(1.5)\,(1.8)\,(0.5) = 0.675\ \mathrm{m}^3$

$V_B = (2.5)\,(1.8)\,(0.5) = 2.25\ \mathrm{m}^3$

$V_C = (0.5)\,(1.5)\,(1.8)\,(0.5) = 0.675\ \mathrm{m}^3$

Parça	V (m^3)	$\tilde{x}$ (m)	$\tilde{y}$ (m)	$\tilde{z}$ (m)	$\tilde{x}V$ (m^4)	$\tilde{y}V$ (m^4)	$\tilde{z}V$ (m^4)
A	0.675	1.0	0.25	0.6	0.675	0.1688	0.405
B	2.25	0.25	1.25	0.9	0.5625	2.813	2.025
C	0.675	0.25	3.0	0.6	0.1688	2.025	0.405
Σ	**3.6**				**1.406**	**5.007**	**2.835**

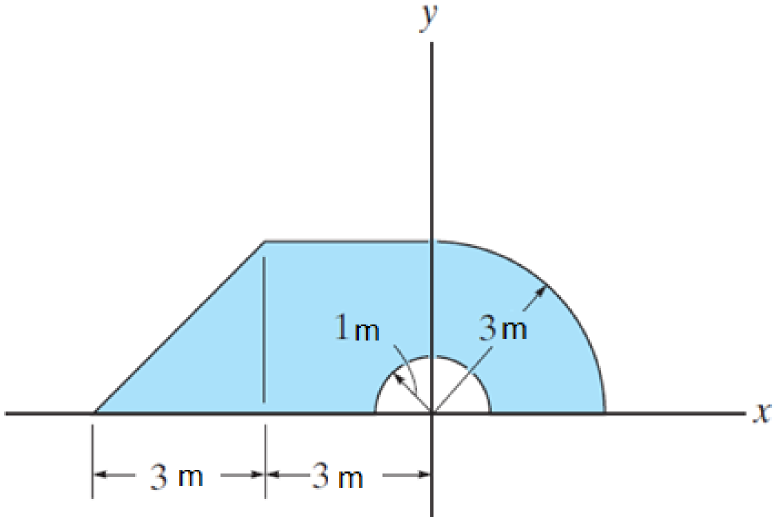
$\bar{x} = (\Sigma\,\tilde{x}\,V) / (\Sigma V) = 1.406 / 3.6 = 0.391\ \mathrm{m}$

$\bar{y} = (\Sigma\,\tilde{y}\,V) / (\Sigma V) = 5.007 / 3.6 = 1.39\ \mathrm{m}$

$\bar{z} = (\Sigma\,\tilde{z}\,V) / (\Sigma V) = 2.835 / 3.6 = 0.788\ \mathrm{m}$

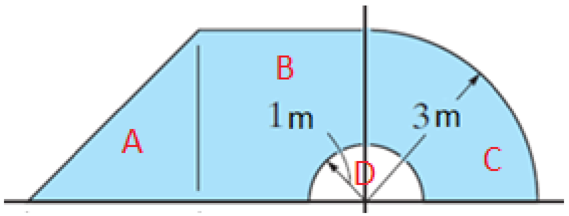
ÖRNEK-2

- **Soru:** Şekildeki sistemin geometrik merkezini tespit ediniz.



- **Çözüm:** Sistem, A, B ve C alanları ve eksiltilecek D alanı olmak üzere dört parça olarak düşünülür.

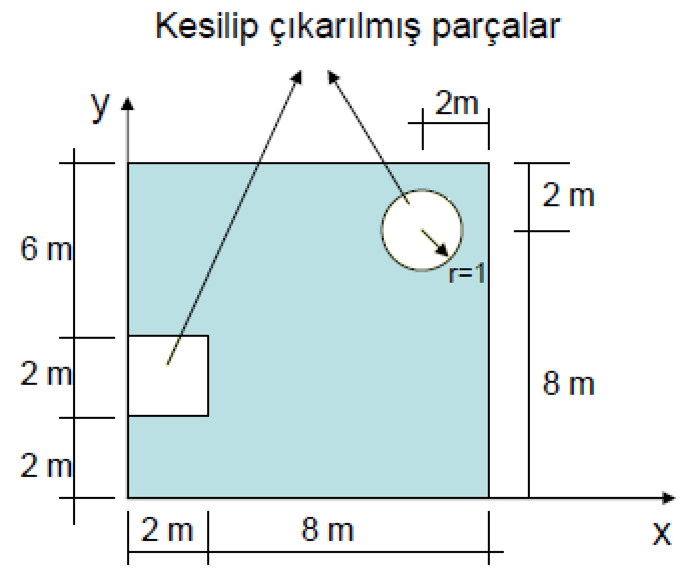
Parça	A (m^2)	$\tilde{x}$ (m)	$\tilde{y}$ (m)	$\tilde{x}A$ (m^3)	$\tilde{y}A$ (m^3)
Üçgen A	4.5	– 4	1	– 18	4.5
Kare B	9.0	– 1.5	1.5	– 13.5	13.5
Çeyrek D. C	$9\pi / 4$	$4(3)/(3\pi)$	$4(3)/(3\pi)$	9	9
Yarım D. D	$-\pi/2$	0	$4(1)/(3\pi)$	0	– 0.67
Σ	**19.00**			**– 22.5**	**26.33**



$$\bar{x} = (\Sigma \tilde{x} A) / (\Sigma A) = -22.5 \text{ m}^3 / 19.0 \text{ m}^2 = \underline{-1.18 \text{ m}}$$

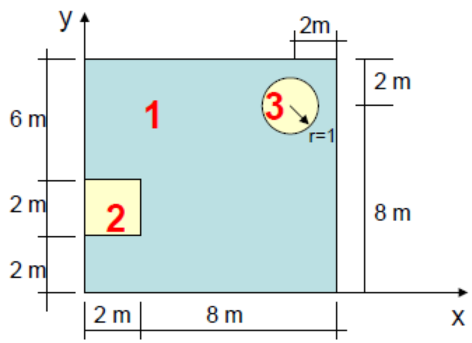
$$\bar{y} = (\Sigma \tilde{y} A) / (\Sigma A) = 26.33 \text{ m}^3 / 19.0 \text{ m}^2 = \underline{1.39 \text{ m}}$$

ÖRNEK-3



- **Soru:** Şekildeki sistemin geometrik merkezini tespit ediniz.

- **Çözüm:** 1 numaralı alan ve 2 ve 3 numaralı eksiltilecek alan belirlenir.



Alan No	Alan (m²)	$\bar{x}_i(m)$	$\bar{y}_i(m)$	$\bar{x}_iA_i(m^3)$	$\bar{y}_iA_i(m^3)$
1	100	5	5	500	500
2	-4	1	3	-4	-12
3	-3.14	8	8	-25.13	-25.13
Toplam	92.86			470.87	462.87

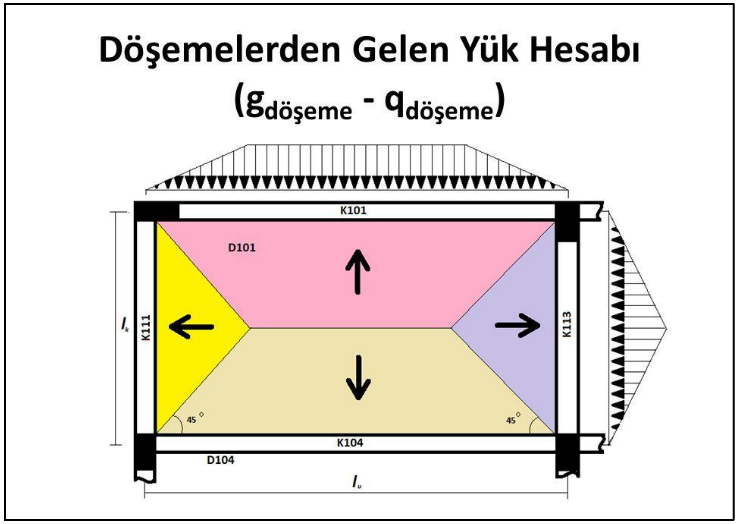
$$\bar{x} = \frac{470.87}{92.86} = 5.07m \qquad \bar{y} = \frac{462.87}{92.86} = 4.98m$$

Yayılı Yükler

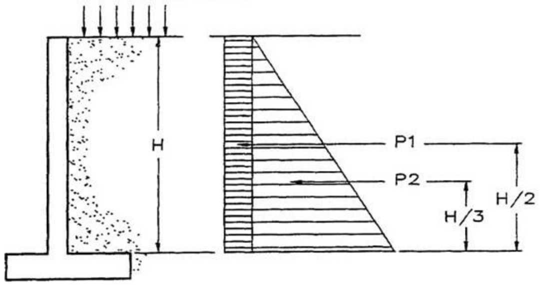
•Mühendislik yapıları ve elemanları yalnızca tekil değil, çoğunlukla yayılı yüklerin etkisindedir.

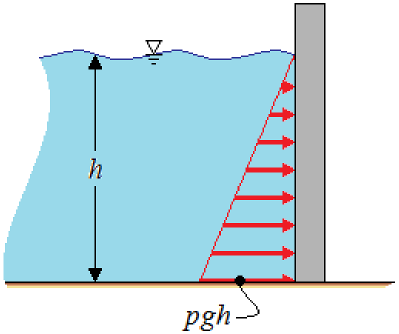
•Yayılı yükler çatılara, istinat duvarlarına, barajlara, kirişlere ve daha bir çok elemana bir alan boyunca sürekliliği olan yüklemeler şeklinde etkimektedir.

•Mühendislik çözümlemeleri sırasında bu yükler eşdeğer tek bir yüke indirgenir ve bu şekilde SCD oluşturulur.



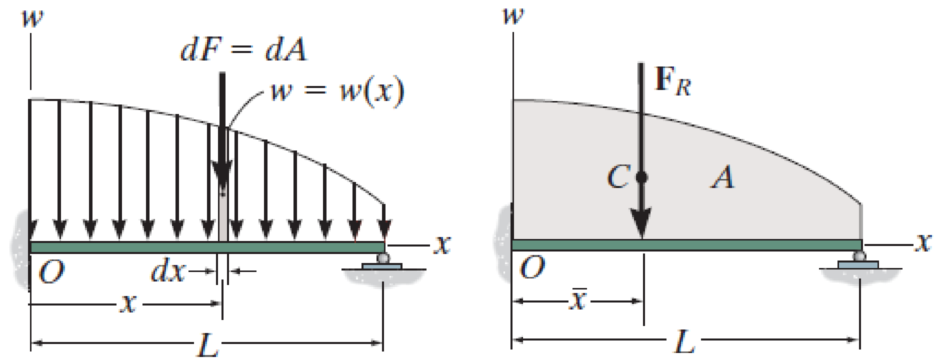
Çöken Pazar Yeri - Kars / Kağızman





Yayılı Yüklerin Tekil Yüke İndirgenmesi

•Bir kirişe etkiyen sonsuz sayıdaki dF paralel kuvvetinin integrasyonu ile bileşke kuvvetin değeri belirlenir.



$$+\downarrow F_R = \Sigma F;$$

$$F_R = \int_L w(x)\,dx = \int_A dA = A$$

•Bileşke kuvvetin yeri, her bir dA birim alanının O noktasında yarattığını momentlerin toplamının, toplam alana bölünmesiyle elde edilir. Yani ağırlık merkezi hesap yöntemi uygulanır.

$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O;$$

$$-\bar{x}F_R = -\int_L x w(x)\,dx$$

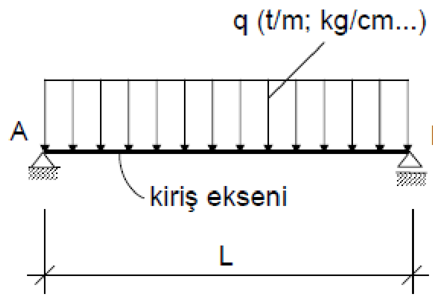
$$\bar{x} = \frac{\int_L x w(x)\,dx}{\int_L w(x)\,dx} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}$$

Yayılı Yüklerin Tekil Yüke İndirgenmesi

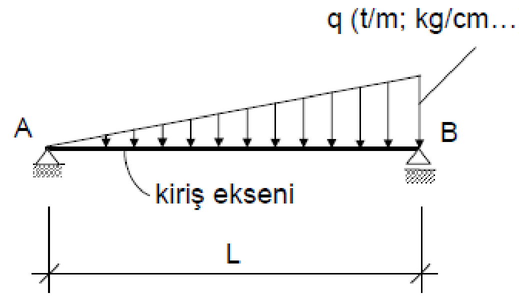
- En sık karşılaşılan yükleme durumlarından ikisi düzgün yayılı yükler ve üçgen yayılı yüklerdir.

- Yayılı şekilde etkiyen yükün (örn. t/m) tesir ettiği uzunluğa ve geometrisine göre alan hesabı yapılır (düzgün yayılı yük için m×(t/m)= t) ve bu işlem sonucu elde edilen tekil yük, yayılı yükün ağırlık merkezine etkitilir.

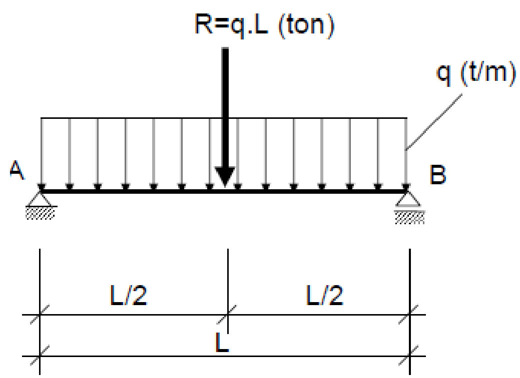
- Bu şekilde SCD'si oluşturulan sistem kolay bir şekilde çözümlenebilir, mesnet reaksiyonları hesaplanabilir.



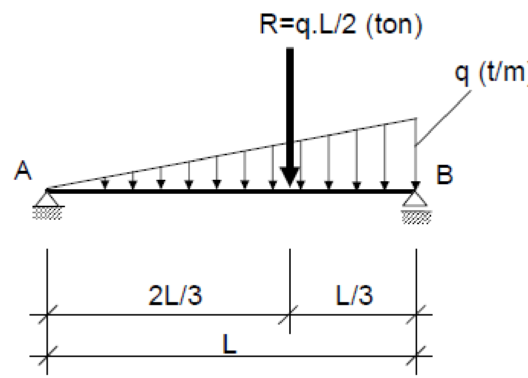
Düzgün yayılı yük (örneğin; duvar yükü, zati yük vb.)



Düzgün yayılı üçgen yük



Düzgün yayılı yük (örneğin; duvar yükü, zati yük vb.)



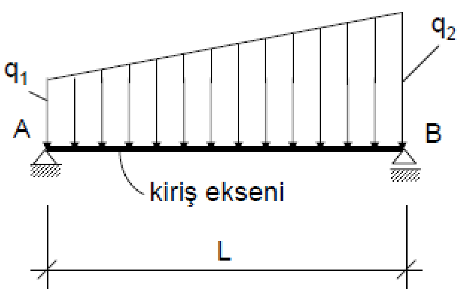
Düzgün yayılı üçgen yük

Yayılı Yüklerin Tekil Yüke İndirgenmesi

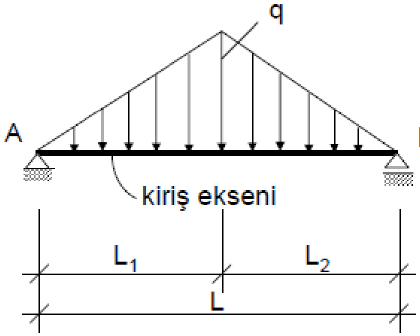
•Diğer sık karşılaşılan yayılı yükler trapez (yamuk) veya kompozit olarak etkiyen üçgen-düzgün yayılı yük kombinasyonlarıdır.

•Bu durumlarda sistemin ağırlık merkezini bulmak yerine ağırlık merkezi bilinen her bir basit yayılı yükün (düzgün veya üçgen) ağırlık merkezine ayrı ayrı indirgeme yapılabilir.

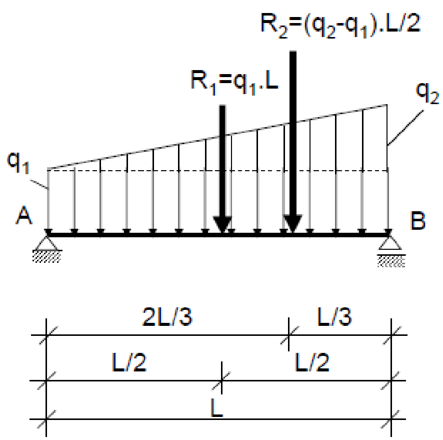
•İndirgenmiş tekil yükün büyüklüğünün ve yerinin doğru tespit edilmesi, sistemin doğru çözümü açısından zaruridir.



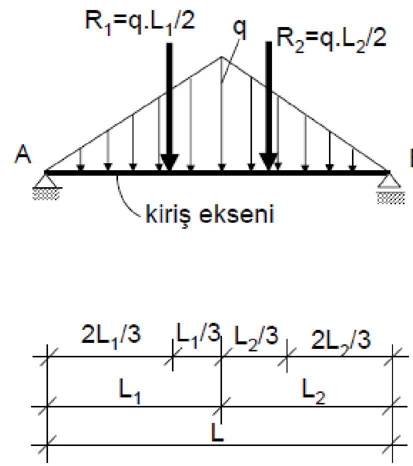
Düzgün yayılı trapez (yamuk) yük



Değişken üçgen yayılı yük (döşemeden kirişe aktarılan yük)



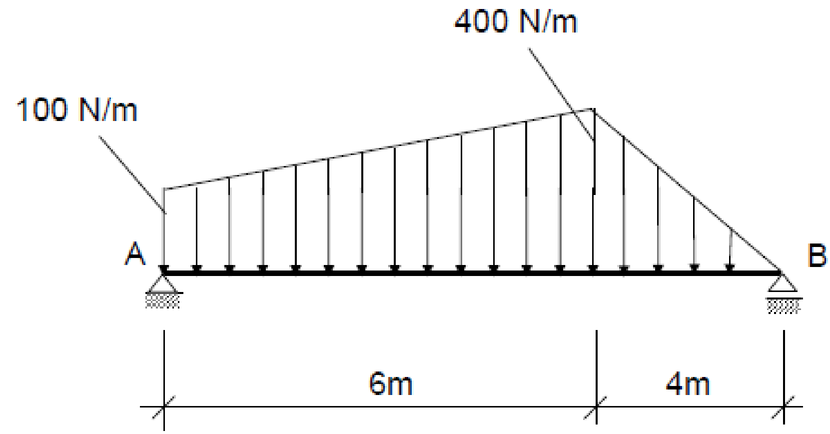
Trapez; dikdörtgen ve üçgen olmak üzere 2 elemana ayrılır.



2 farklı üçgen tek-tek dikkate alınır.

ÖRNEK-4

- **Soru:** Şekildeki kirişte verilen yayılı yükleri tek bir kuvvete indirgeyerek mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız.

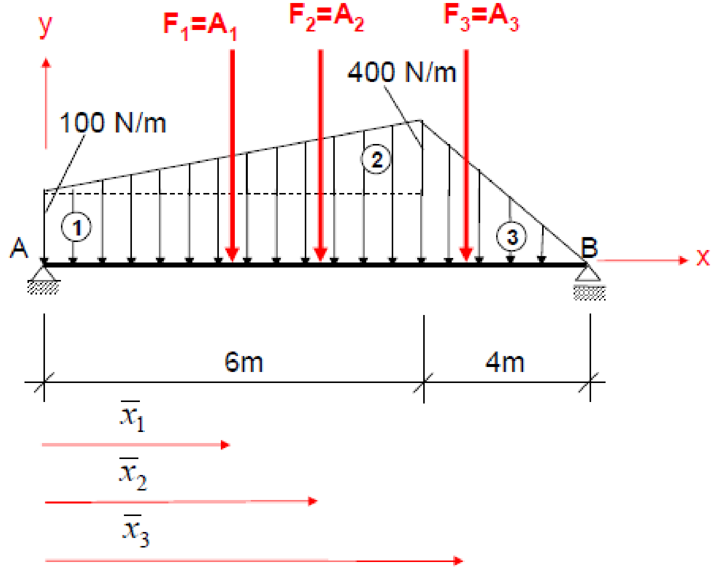


- **Çözüm:**

Alan No	Alan (N)	$\bar{x}_i\,(m)$	$\bar{x}_i A_i\,(Nm)$
1	100*6	6/2	1800 Nm
2	(1/2)*300*6	(2/3)*6	3600 Nm
3	(1/2)*400*4	6+(1/3)*4	5864 Nm
Toplam	2300 N		11264 Nm

$$\bar{x} = \frac{11264}{2300} = 4.9m$$

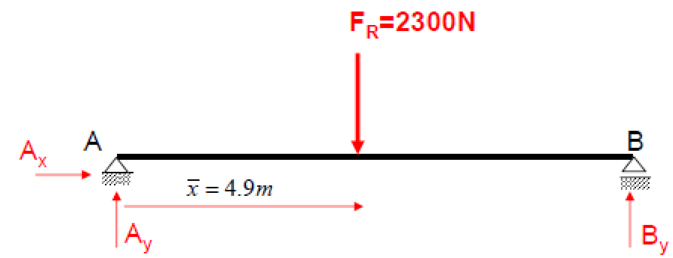
$F_R = 2300$ N



$$\rightarrow + \sum F_x = A_x = 0$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = -2300\times4{,}9 + B_y \times 10 = 0 \qquad B_y = 1127\ \text{N}$$

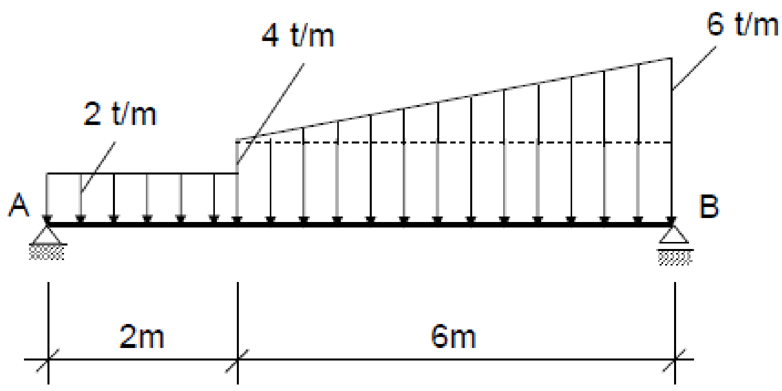
$$\uparrow + \sum F_y = A_y + 1127 - 2300 = 0 \qquad A_y = 1173\ \text{N}$$



ÖRNEK-5

- **Soru:** Şekildeki kirişte mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız.

- **Çözüm:** Sistem iki düzgün, bir üçgen yayılı yüke indirgenerek çözüm yapılabilir.

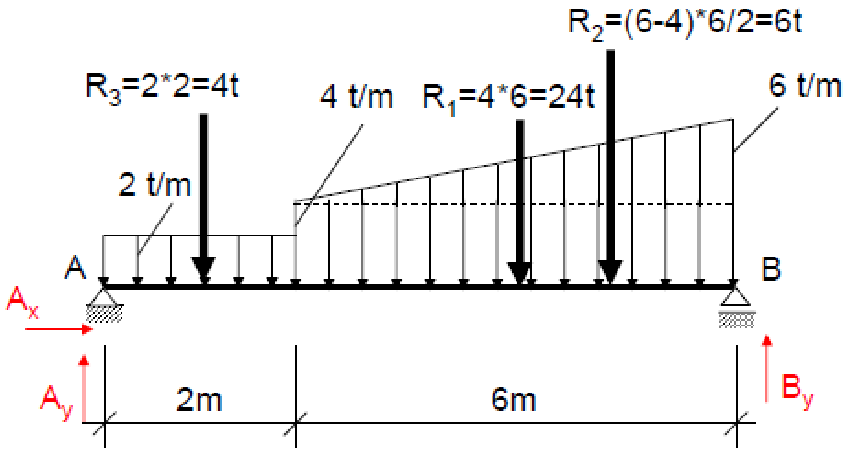


$$\xrightarrow{+} \sum F_X = A_x = 0$$

$$\circlearrowright + \sum M_A = -(4\times1)-(24\times5)-(6\times6) + B_y \times 8 = 0$$

$$B_y = 20\ t$$

$$\uparrow + \sum F_y = A_y + 20 - (4+24+6) = 0 \qquad A_y = 14\ t$$



Faydalanılan kaynaklar:

Mühendislik Mekaniği - Statik, R.C. Hibbeler, S.C. Fan

(Mühendislik Mekaniği – Statik'in Pearson yayınevi tarafından hazırlanan İngilizce sunumları)

https://www.izmirde.biz/?&Syf=1&Id=297934&pt=DUYURU TMO siloları fotoğrafı

kisi.deu.edu.tr/serkan.misir – statik ders notları

kisi.deu.edu.tr/sadik.girgin – statik ders notları

kisi.deu.edu.tr/burak.felekoglu – statik ders notları (Yayılı yük çizimleri, Örnek 3-4-5 bu notlardan alınmıştır)

https://slideplayer.biz.tr/slide/10714797/

www.haberturk.com (Pazar yeri haberi)