STATİK

(MADEN MÜHENDİSLİĞİ)

Dr. Öğr. Üyesi Çağlar YALÇINKAYA

(Dokuz Eylül Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü)

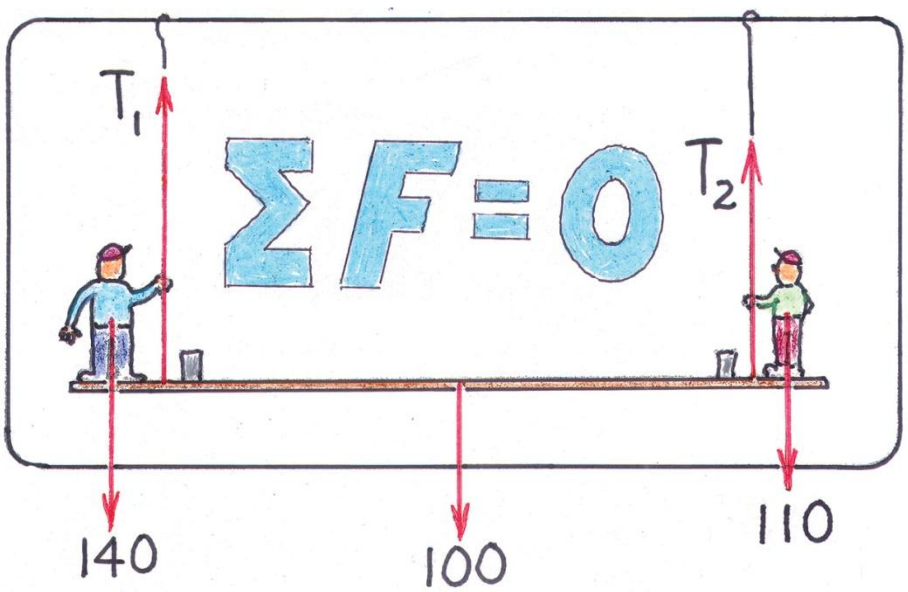
Ders notları için: www.caglaryalcinkaya.com

NOKTASAL CİSMİN DENGESİ

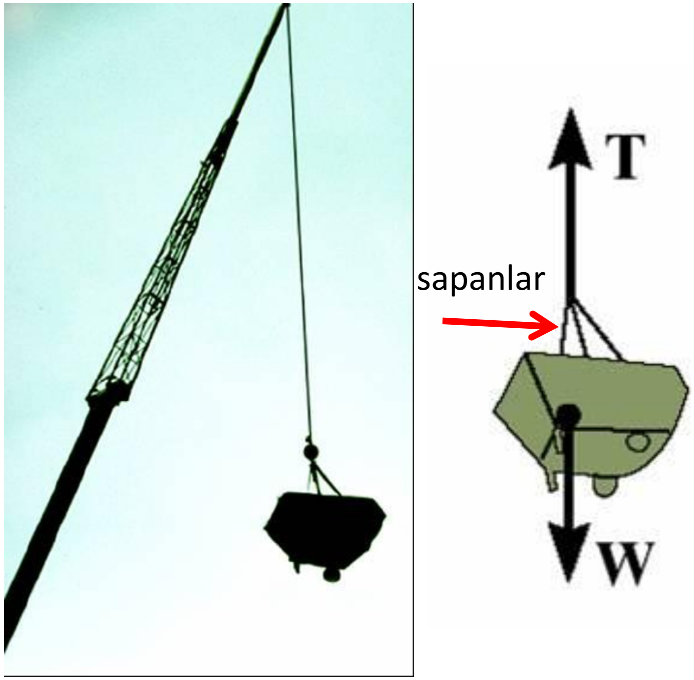
•Bir parçacık, başlangıçta hareketsizken halen durağan halde bulunuyorsa veya başlangıçta hareketli iken halen sabit hıza sahipse dengededir.

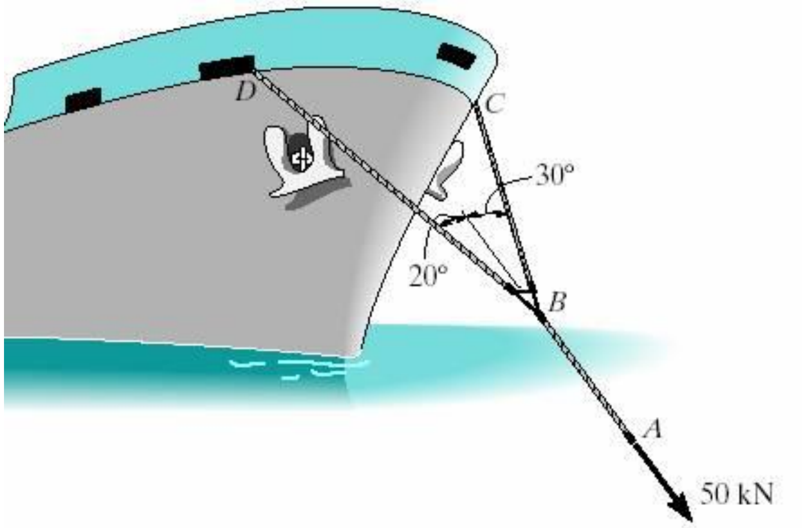
•Statik dersi kapsamında *"denge" veya "statik denge" ifadesi genelde* durmakta olan bir cismi tanımlamak için kullanılır.

•Denge durumunu korumak için Newton'un birinci hareket kanununu sağlamak gereklidir: bir parçacık üzerine etkiyen bileşke kuvvet sıfır ise, parçacık dengededir.



Noktasal cismin dengesi





Vinç ile bir yük taşınmaktadır. Vincin kancası ile yük arasındaki sapanların kopup kopmayacağına karar vermek için, kuvvetleri belirlememiz gerekir.

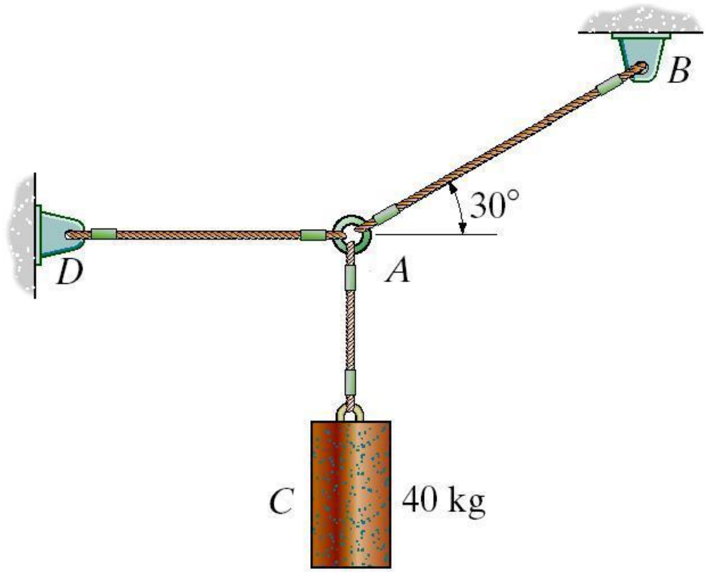
Gemiyi iskeleye bağlayan ana halattaki kuvvet biliniyorsa tali halatlardaki kuvvetleri nasıl buluruz? Halat kalınlıklarını neye göre belirleriz?

Eşdüzlemli kuvvet sistemleri – Serbest cisim diyagramı

•İki boyutlu veya düzlemsel bir kuvvet sistemine bir örnek yanda görülmektedir. Bu örnek bir "***eşdüzlemli kuvvet sistemi***"'dir.

•Eğer sistem dengedeyse, A parçacığı (halkası) da dengededir. Yani sistemin tüm bileşenleri dengededir.

•C ağırlığı sebebiyle kablolardaki çekme kuvvetlerini hesaplamanız için ***Serbest Cisim Diyagramını (SCD)*** nasıl çizeceğinizi ve denge denklemlerini nasıl kuracağınızı bilmeliyiz.



Eşdüzlemli kuvvet sistemleri – Serbest cisim diyagramı

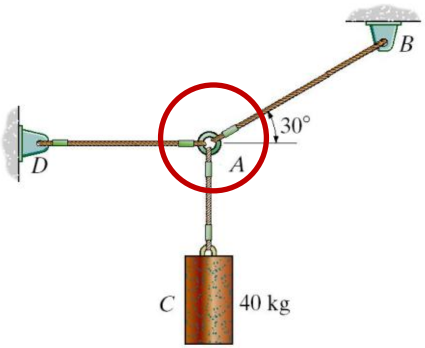
•Serbest cisim diyagramlarınının (SCD) nasıl çizileceğini ve kullanılacağını bilmek, mühendislik mekaniği içinde bilinmesi gereken en önemli konulardan biridir.

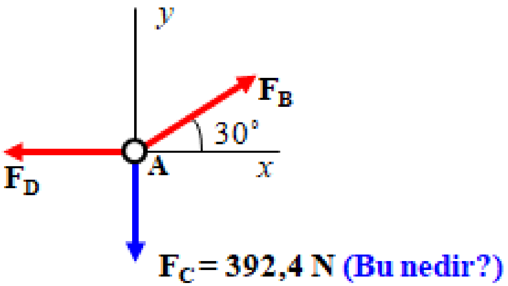
•SCD Nedir?

Bir parçacık üzerine etkiyen tüm dış kuvvetlerin gösterildiği çizimdir.

•SCD Neden gereklidir?

Denge denklemlerinin yazılabilmesini ve bilinmeyenlerin (kuvvet, açılar vb.) çözülmesini sağlayan anahtardır.



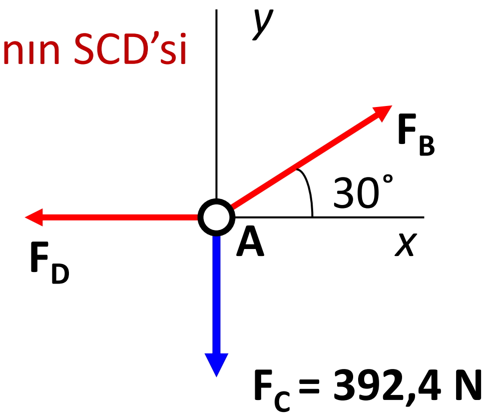


A noktasının SCD'si.

1. *A parçacığı sistemden kesilerek çıkarılır.*
2. *Parçacık üzerine etkiyen, dengede tutan tüm kuvvetler gösterilir.*
3. *Her bir kuvvet tanımlanır ve bilinen tüm büyüklükler ve yönleri gösterilir.*
4. *Bilinmeyen tüm büyüklük ve/veya yönleri değişkenler olarak ifade edilir.*

Eşdüzlemli kuvvet sistemleri – Serbest cisim diyagramı

A’nın SCD’si



A parçacığı dengede olduğundan, A’ya etkiyen bileşke kuvvetlerin toplamı sıfırdır.

Yani $\boldsymbol{F_B} + \boldsymbol{F_C} + \boldsymbol{F_D} = 0$

Veya $\Sigma \boldsymbol{F} = 0$

Genel olarak dengedeki bir parçacık için,

$\Sigma \boldsymbol{F} = 0$ veya

$\Sigma F_x \boldsymbol{i} + \Sigma F_y \boldsymbol{j} = 0 = 0 \boldsymbol{i} + 0 \boldsymbol{j}$ (bir vektör eşitliği)

Skaler formda yazacak olursak;

$\Sigma F_x = 0$ and $\Sigma F_y = 0$

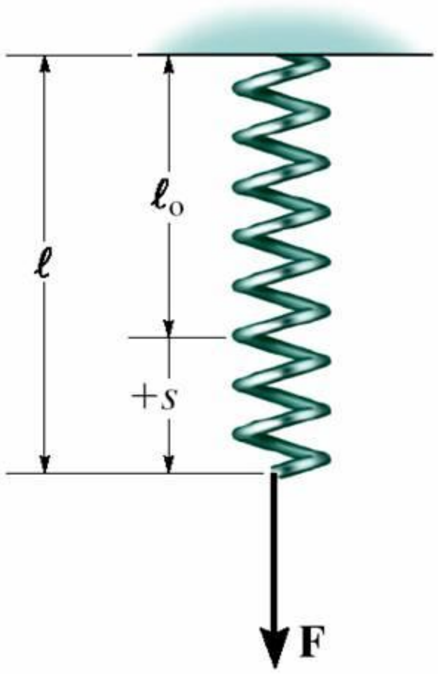
Bunlar denge için gerekli iki skaler denklemdir. En fazla iki bilinmeyenin çözümü için kullanılabilirler.

$+\uparrow \Sigma F_y = F_B \sin 30º - 392.4 \text{ N} = 0$ İlk denklemden, $F_B = 785$ N $\rightarrow$

$+\rightarrow \Sigma F_x = F_B \cos 30º - F_D = 0$ İkinci deklemden, $F_D = 680$ N $\leftarrow$

Basit yaylar

•Mühendislikte en çok kullanılan bağlantılardan biri de yaylardır.



•Doğrusal (lineer) elastik bir yayın ilk boyu l_0 ‘dır. Yayın ucuna bir F kuvveti etkitildiğinde, yayın boyu F kuvveti ile orantılı olarak +s kadar uzar. Uzama yönü ve F kuvvetinin yönü aynıdır. Yayın elastikliğini tanımlayan parametreye “yay sabiti” veya “rijitlik” denir. “k” harfi ile gösterilir.

Yay kuvveti= yay sabiti* yayın deformasyonu

$$F = k * s$$

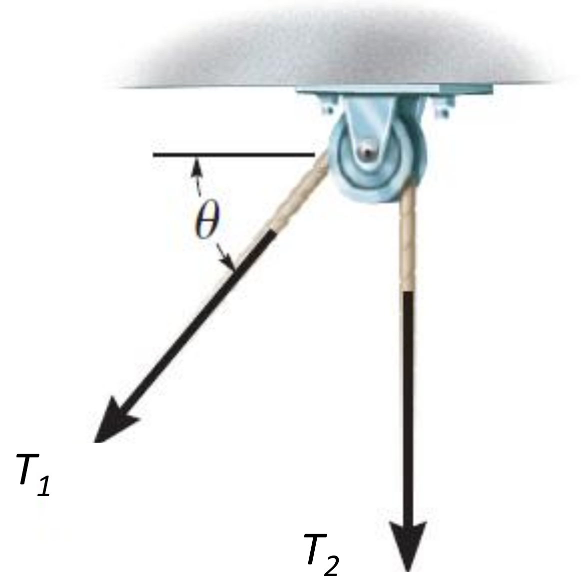
Kablolar ve makaralar

•Mühendislikte en çok kullanılan bağlantılardan bir diğeri de kablo-makara sistemleridir.

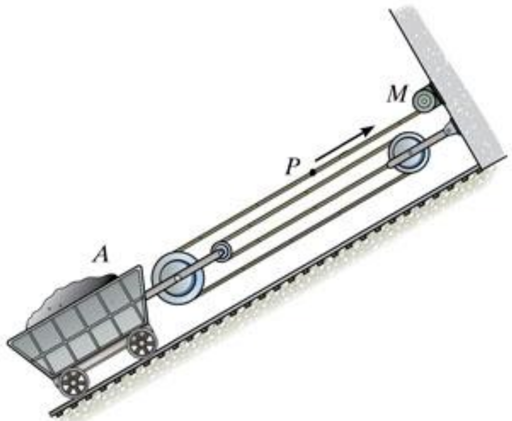
• Sürtünmesiz bir makara ve kablo durumunda

$T_1 = T_2$

•Kablolar, ***sadece çekme kuvveti taşıyabilir.*** Bu kuvvet kablo doğrultusundadır. Aksi belirtilmedikçe kabloların ağırlıksız olduğunu ve uzama yapmadığını kabul ederiz.



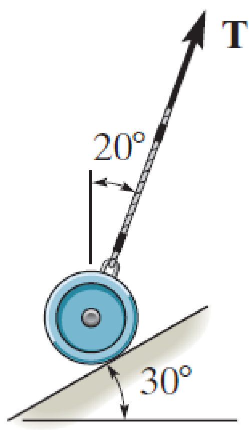
Kablolar çekme kuvvetine maruzdur



Maden, inşaat ve makine mühendisliğinde kablo ve makaralardan sıklıkla faydalanılır.

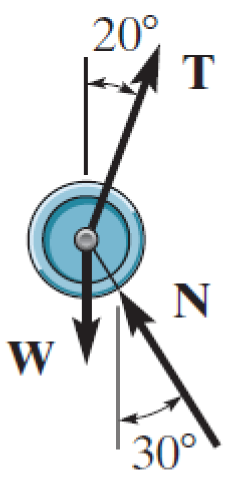
Pürüzsüz temas yüzeyi

•Eğer bir cisim pürüzsüz (düzgün) bir yüzeye temas ediyorsa, yüzey cisme, temas noktasında ve yüzeye dik bir kuvvet uygulayacaktır.



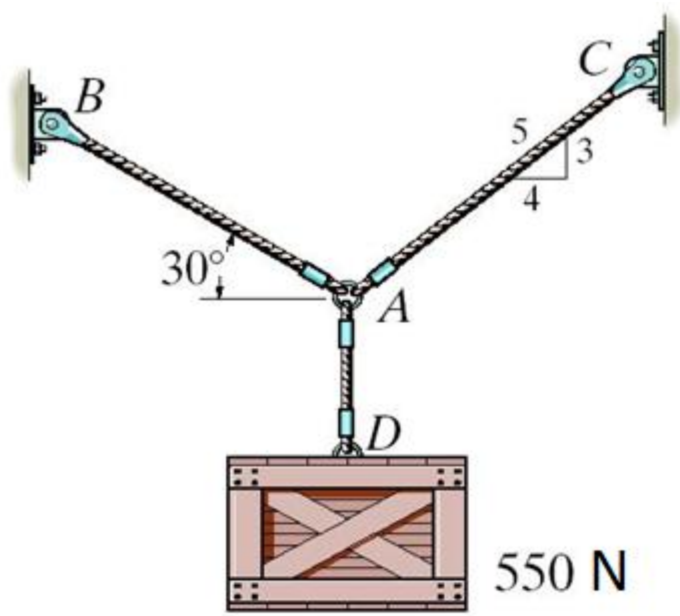
•Bu normal kuvvet N’ye ilave olarak, cisim üzerine kendi ağırlığı W ve kablodaki T çekme kuvveti etki etmektedir.

•Bu üç kuvvet aynı düzlemde ve silindirin merkezinde bulunduğundan, bu “parçacığa” denge denklemleri uygulayabiliriz, ki bu silindire uygulanacak denklemler ile aynı anlamda gelir.



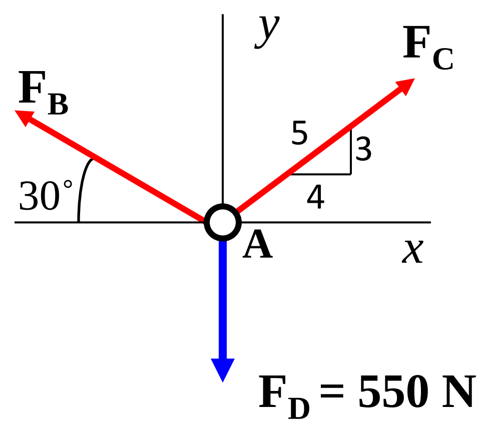
Örnek-1

•**Soru:** Şekildeki kutu 550 N ağırlığındadır. Kutuyu taşıyan AB ve AC halatlarındaki kuvvetleri tespit ediniz.



•**Çözüm:** Öncelikle A noktasındaki SCD çizilir ve bilinen/bilinmeyen büyüklükler çizime işlenir. Daha sonra denge denklemleri yazılır.

A'nın SCD'si



A'ya skaler denge denklemi uygulanırsa;

$+ \rightarrow \sum F_x = -F_B \cos 30° + F_C\,(4/5) = 0$

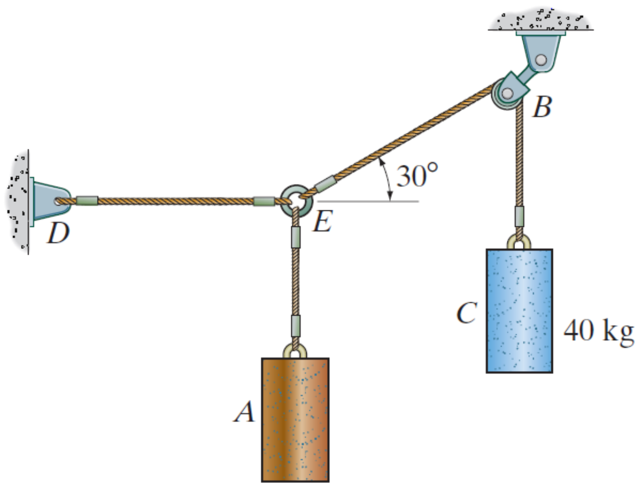
$+ \uparrow \sum F_y = F_B \sin 30° + F_C\,(3/5) - 550\text{ N} = 0$

Eşitlikler çözüldüğünde;

$\underline{F_B = 478\text{ N}}\ \nwarrow$ and $\underline{F_C = 518\text{ N}}\ \nearrow$

Örnek-2

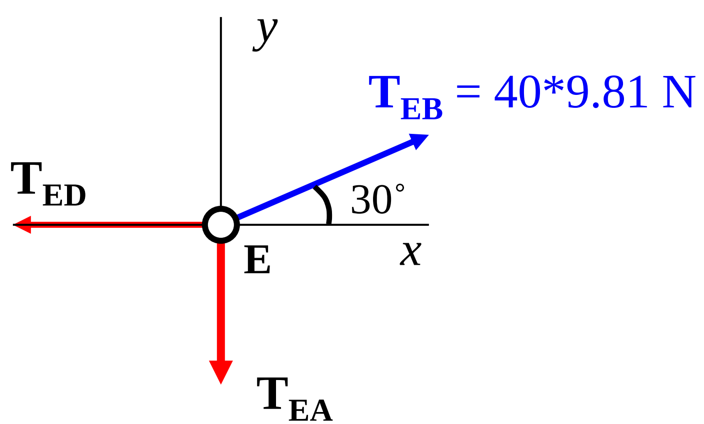
•**Soru:** Şekildeki sistemde C silindirinin kütlesi 40 kg'dır. DE, EA ve EB kablolarındaki çekme kuvvetlerini hesaplayınız.



•**Çözüm:** Öncelikle E noktasındaki SCD çizilir ve bilinen/bilinmeyen büyüklükler çizime işlenir. Daha sonra denge denklemleri yazılır.

•Önemli: EB ile BC kablo kuvvetlerinin eşit olması gerektiğine dikkat ediniz. Kuvvetleri SI birim sistemine göre N cinsinden ifade ederiz.

E'deki SCD



Skaler denge denklemlerini yazacak olursak;

$$+\rightarrow \sum F_x = -T_{ED} + (40*9,81)\cos 30^\circ = 0$$

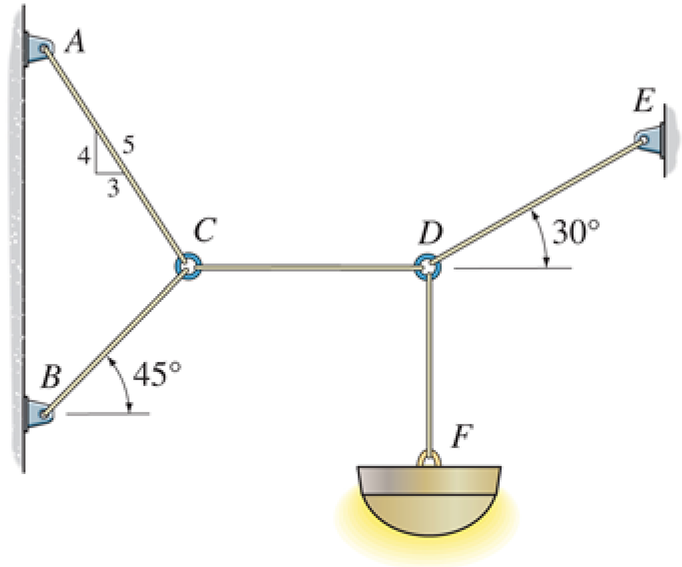
$$+\uparrow \sum F_y = (40*9,81)\sin 30^\circ - T_{EA} = 0$$

Denklemler çözüldüğünde;

$T_{ED} = 340$ N $\leftarrow$ and $T_{EA} = 196$ N $\downarrow$

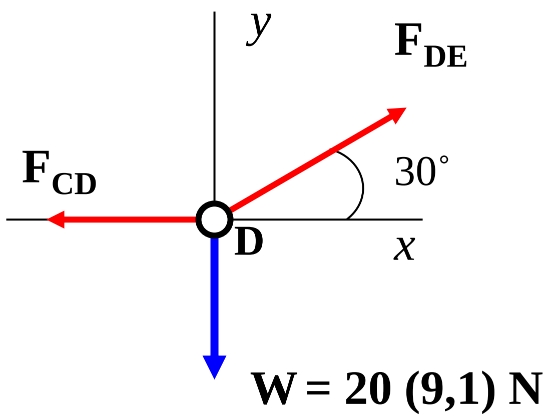
Örnek-3

Soru: Şekildeki sistemde lambanın kütlesi 20 kg'dır. Her bir kablodaki kuvveti bulunuz.



•**Çözüm:** Bilinen ağırlığın etki etiği D noktasının SCD'si çizilir. Denge denklemlerinden CD ve DE kabloları çözümlendikten sonra AC ve AB kabloları için C noktasının SCD'si çizilir ve denge denklemleri hazırlanır.

D'deki SCD



D noktasındaki skaler denge denklemleri;

$+\uparrow \sum F_y = F_{DE} \sin 30° - 20\,(9{,}81) = 0$

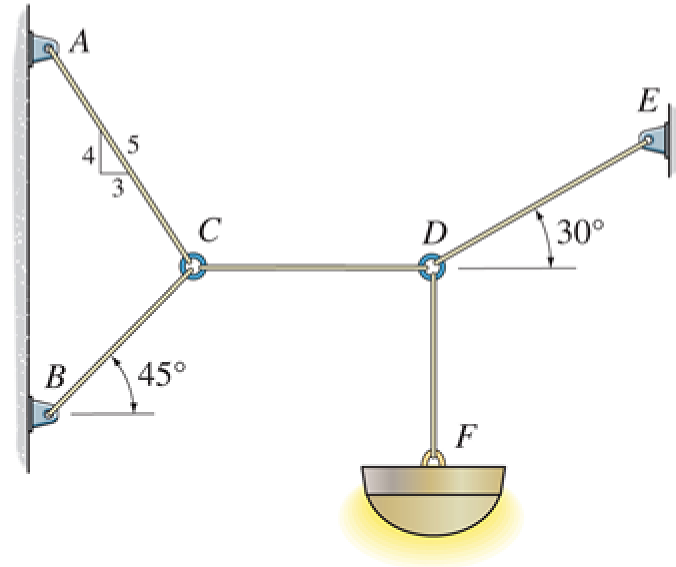
$+\rightarrow \sum F_x = F_{DE} \cos 30° - F_{CD} = 0$

Denklemler çözülürse;

$F_{DE} = 392$ N and $F_{CD} = 340$ N

Örnek-3

•**Çözüm:** Şimdi AC ve AB kabloları için C noktasının SCD’si çizilir ve denge denklemleri hazırlanır.



C noktasındaki denge denklemlerinden;

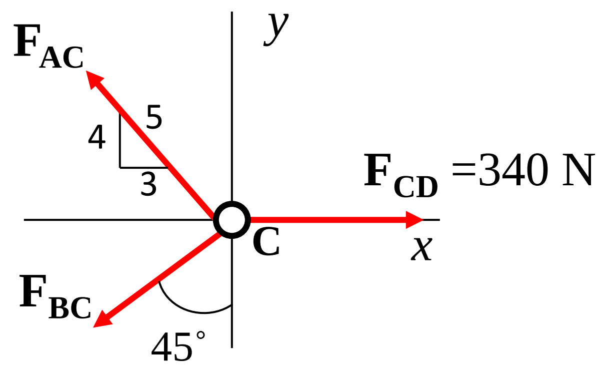
$+\rightarrow \sum F_x = 340 - F_{BC} \sin 45^\circ - F_{AC}\,(3/5) = 0$

$+\uparrow \sum F_y = F_{AC}\,(4/5) - F_{BC} \cos 45^\circ = 0$

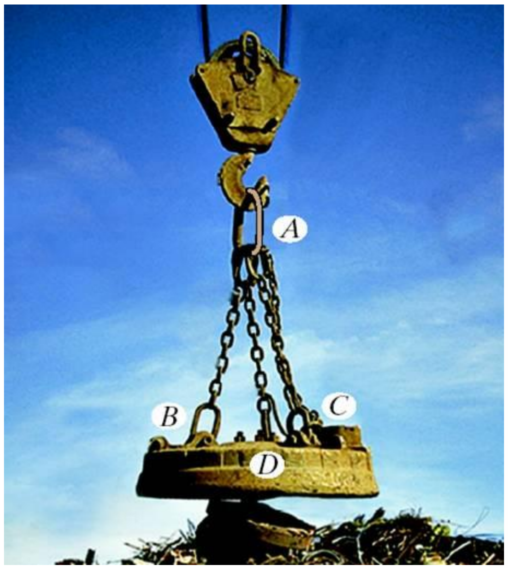
Solving the above equations, we get;

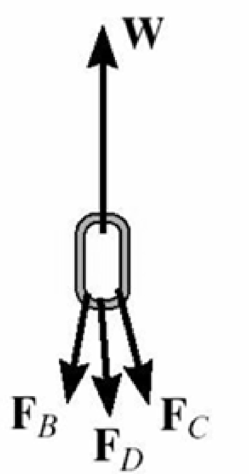
$\underline{F_{BC} = 275\ \text{N}}$ ↙ and $\underline{F_{AC} = 243\ \text{N}}$ ↖

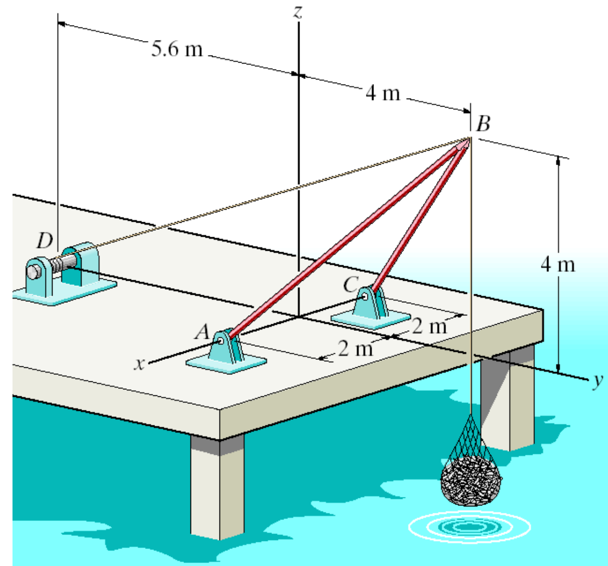
C’deki SCD



Üç boyutlu kuvvet sistemleri





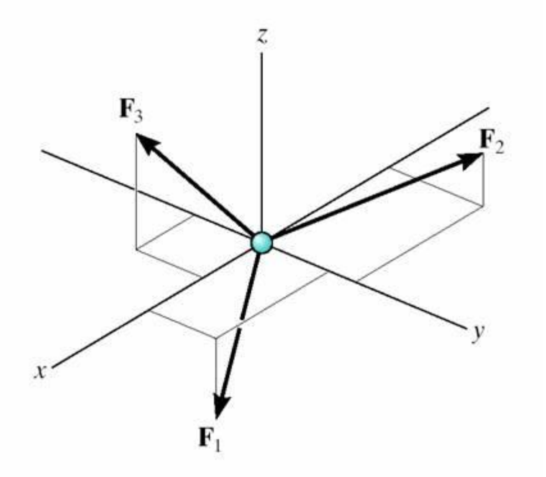


Elektro-mıknatısın ağırlığını ve taşıdığı yükü biliyorsunuz. Fakat, kullanılan teçhizatın güvenli olup olmadığını görmek için zincirlerdeki kuvvetleri bilmeniz gerekir. Bunu nasıl yapabilirsiniz?

Bu kollu vinç en fazla 200 kg’lık balığı kaldırmak için tasarlanmıştır. Sapma mesafesinin, kablodaki ve vincin ayaklarındaki kuvvetler üzerine etkisini nasıl bulabilirsiniz?

Üç boyutlu denge denklemleri

•Eğer bir parçacık dengedeyse, parçacık üzerine etkiyen kuvvetlerin vektörel toplamı sıfır olmalıdır ($\Sigma\, \boldsymbol{F} = 0$).



• Bu denklem, vektörün x, y ve z bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir;

$(\Sigma\, F_x)\, \boldsymbol{i} + (\Sigma\, F_y)\, \boldsymbol{j} + (\Sigma\, F_z)\, \boldsymbol{k} = 0$

•Bu vektörel denklem sadece aşağıdaki koşullar altında sağlanır;

$\Sigma F_x = 0$

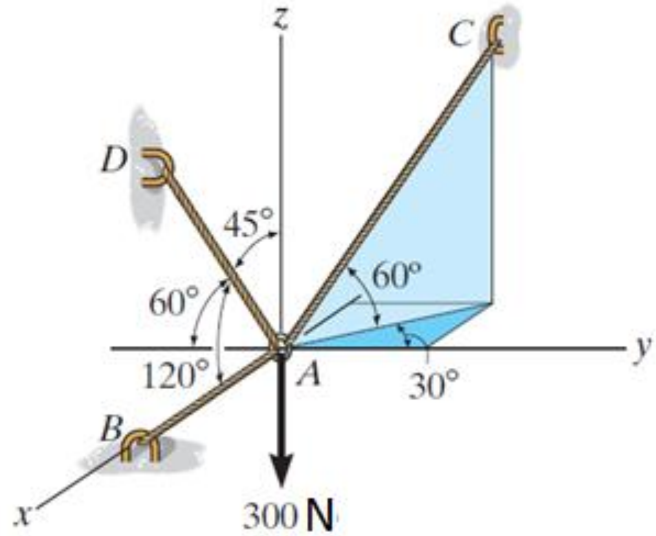
$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma F_z = 0$

•Bu denklemler, dengenin üç skaler denklemi olarak bilinir. Denge halindeki cismin üzerindeki tüm noktalar için geçerlidir ve en fazla üç bilinmeyene sahip problemlerin çözümüne izin verir.

Örnek-1

•**Soru:** Şekildeki AB, AC ve AD kablolarında gelişen kuvvetleri tespit ediniz.



•**Çözüm:** A noktasının SCD'si çizilir. Kablo kuvvetleri kartezyen formda ifade edilir. Üç eksendeki üç denge denklem vasıtasıyla bilinmeyenler bulunur.

$\boldsymbol{T_B} = T_B \; \boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{T_C} = -(T_C \cos 60°) \sin 30° \; \boldsymbol{i}$
$\quad + (T_C \cos 60°) \cos 30° \; \boldsymbol{j}$
$\quad + T_C \sin 60° \; \boldsymbol{k}$

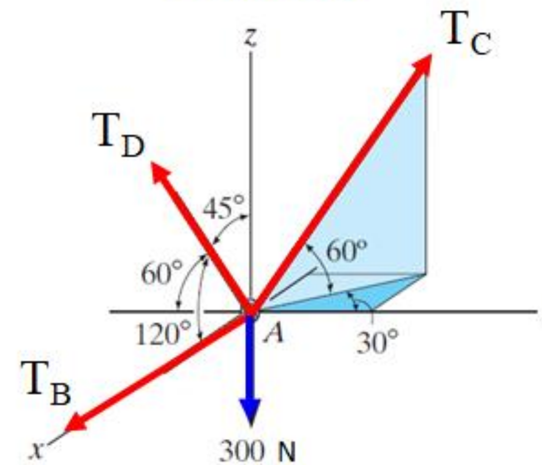
$\boldsymbol{T_C} = T_C\,(-0{,}25\, \boldsymbol{i} + 0{,}433\, \boldsymbol{j} + 0{,}866\, \boldsymbol{k})$

$\boldsymbol{T_D} = T_D \cos 120° \; \boldsymbol{i} + T_D \cos 120° \; \boldsymbol{j} + T_D \cos 45° \; \boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{T_D} = T_D\,(-0{,}5\, \boldsymbol{i} - 0{,}5\, \boldsymbol{j} + 0{,}7071\, \boldsymbol{k})$

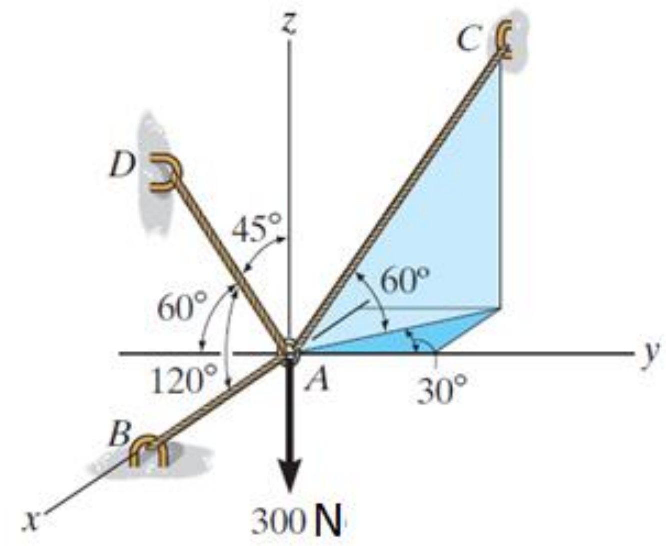
$\boldsymbol{W} = -300\; \boldsymbol{k}$

A'daki SCD



Örnek-1

•**Çözüm:**. Üç eksendeki üç denge denklem vasıtasıyla bilinmeyenler bulunur.



$\Sigma \boldsymbol{F_R} = 0 = T_B\, \boldsymbol{i}$

$+ T_C\,(-0{,}25\, \boldsymbol{i} + 0{,}433\, \boldsymbol{j} + 0{,}866\, \boldsymbol{k})$

$+ T_D\,(-0{,}5\, \boldsymbol{i} - 0{,}5\, \boldsymbol{j} + 0{,}7071\, \boldsymbol{k})$

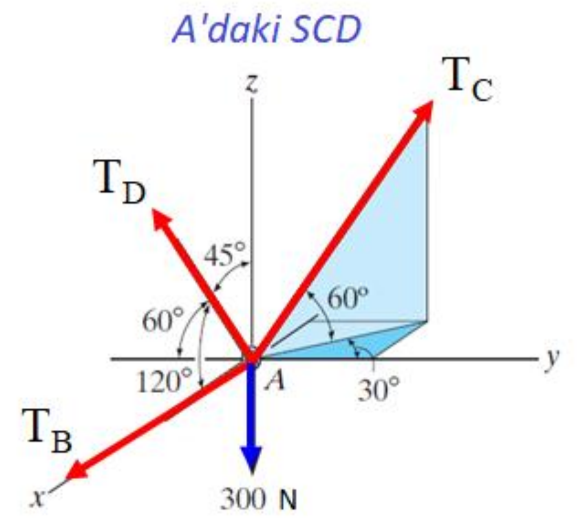
$- 300\, \boldsymbol{k}$

i, ***j***, ***k*** bileşenlerinin toplamı ayrı ayrı sıfır olmalıdır.

$\Sigma F_x = T_B - 0{,}25\, T_C - 0{,}5\, T_D = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0{,}433\, T_C - 0{,}5\, T_D = 0$ (2)

$\Sigma F_z = 0{,}866\, T_C + 0{,}7071\, T_D - 300 = 0$ (3)

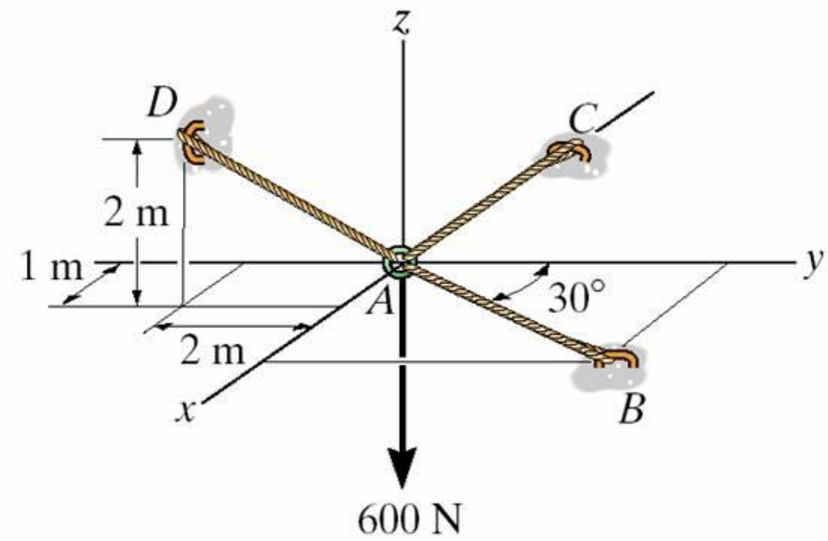


(2) ve (3) numaralı denklemden; $T_C = 203$ N, $T_D = 176$ N

T_C ve T_D (1) denkleminde yerine koyarsak $T_B = 139$ N

Örnek-2

•**Soru:** 600 N ağırlığındaki bir kuvvet şekildeki gibi üç kablo tarafından taşınmaktadır. AB, AC ve AD kablolarındaki çekme kuvvetlerini bulunuz.



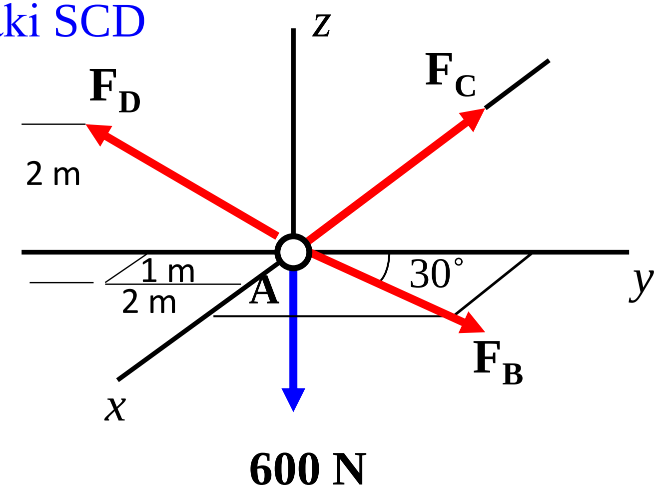
•**Çözüm:** A noktasının SCD'si çizilir, kuvvetler kartezyen formda ifade edilir ve denge denklemleri çözülür.

$\boldsymbol{F_B} = F_B(\sin 30°\ \boldsymbol{i} + \cos 30°\ \boldsymbol{j})$ N

$= \{0{,}5\ F_B\ \boldsymbol{i} + 0{,}866\ F_B\ \boldsymbol{j}\}$ N

$\boldsymbol{F_C} = -F_C\ \boldsymbol{i}$ N

A'daki SCD



$\boldsymbol{F_D} = F_D(\boldsymbol{r_{AD}}/r_{AD})$

$= F_D\{(1\ \boldsymbol{i} - 2\ \boldsymbol{j} + 2\ \boldsymbol{k}) / (1^2 + 2^2 + 2^2)^{½}\}$ N

$= \{0{,}333\ F_D\ \boldsymbol{i} - 0{,}667\ F_D\ \boldsymbol{j} + 0{,}667\ F_D\ \boldsymbol{k}\}$ N

Örnek-2

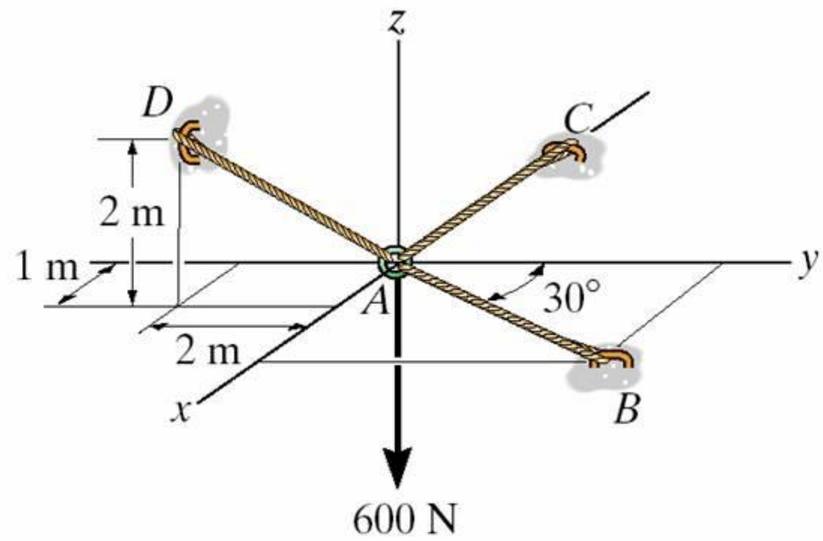
•**Çözüm:** Denge denklemleri çözülür.

i, ***j***, and ***k*** bileşenleri sıfıra eşitlenir.

$\sum F_x = 0{,}5\ F_B - F_C + 0{,}333\ F_D = 0$

$\sum F_y = 0{,}866\ F_B - 0{,}667\ F_D = 0$

$\sum F_z = 0{,}667\ F_D - 600 = 0$

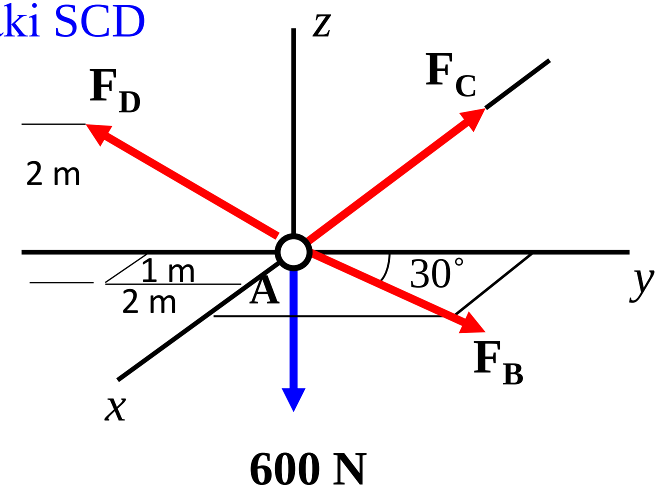


$\underline{F_C = 646\ N}$ (pozitif olduğunda SCD'de kabul edilen yöndedir, yani çekme şeklindedir.)

$\underline{F_D = 900\ N}$

$\underline{F_B = 693\ N}$

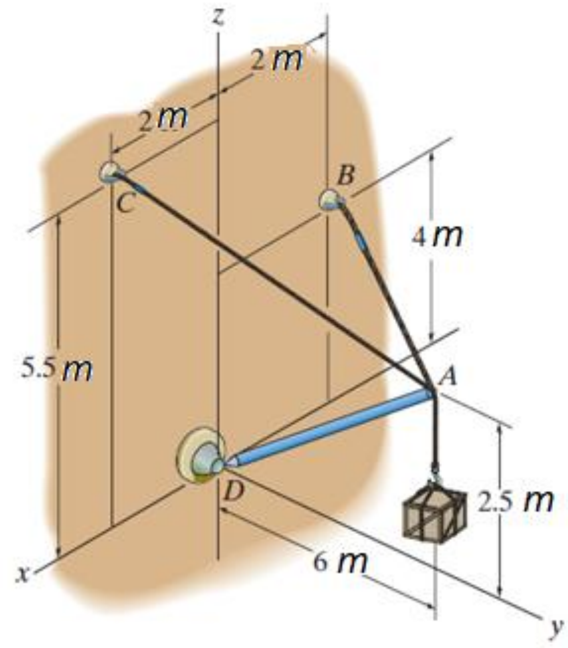
A'daki SCD



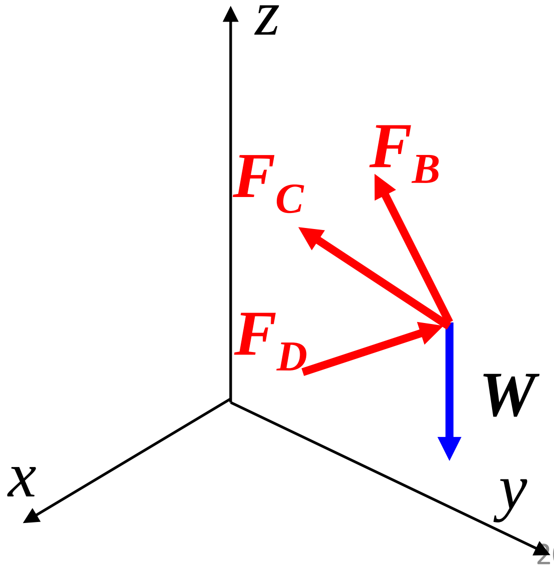
Örnek-3

•**Soru:** 400 N'luk bir kutu, iki kablo ve AD çubuğu ile dengede tutulmaktadır. Her bir kablodaki çekmenin büyüklüğünü ve AD çubuğu üzerinde gelişen kuvveti tespit ediniz.

•**Çözüm:** A noktasının SCD'si çizilir. Kuvvetler kartezyen formda yazılır ve denge denklemleri çözülür.



A'daki SCD



$\boldsymbol{W}$ = kutunun ağırlığı= - 400 $\boldsymbol{k}$ N

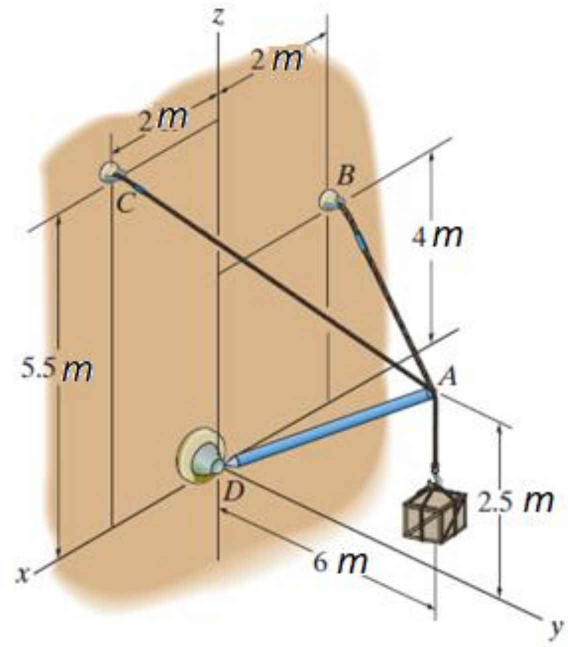
$\boldsymbol{F_B} = F_B(\boldsymbol{r_{AB}}/r_{AB}) = F_B\{(-2\,\boldsymbol{i} - 6\,\boldsymbol{j} + 1{,}5\,\boldsymbol{k}) / (6{,}5)\}$ N

$\boldsymbol{F_C} = F_C(\boldsymbol{r_{AC}}/r_{AC}) = F_C\{(2\,\boldsymbol{i} - 6\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}) / (7)\}$ N

$\boldsymbol{F_D} = F_D(\boldsymbol{r_{DA}}/r_{DA}) = F_D\{(6\,\boldsymbol{j} + 2{,}5\,\boldsymbol{k}) / (6{,}5)\}$ N

Örnek-3

•**Çözüm:** Denge denklemleri çözülür.



The particle A is in equilibrium, hence

$\boldsymbol{F_B} + \boldsymbol{F_C} + \boldsymbol{F_D} + \boldsymbol{W} = 0$

Her bir ***i***, ***j***, ***k*** bileşeninin toplamı sıfır olmalıdır.).

$\sum F_x = -(2 / 6{,}5)\, F_B + (2 / 7)\, F_C = 0$ (1)

$\sum F_y = -(6 / 6{,}5)\, F_B - (6 / 7)\, F_C + (6 / 6{,}5)\, F_D = 0$ (2)

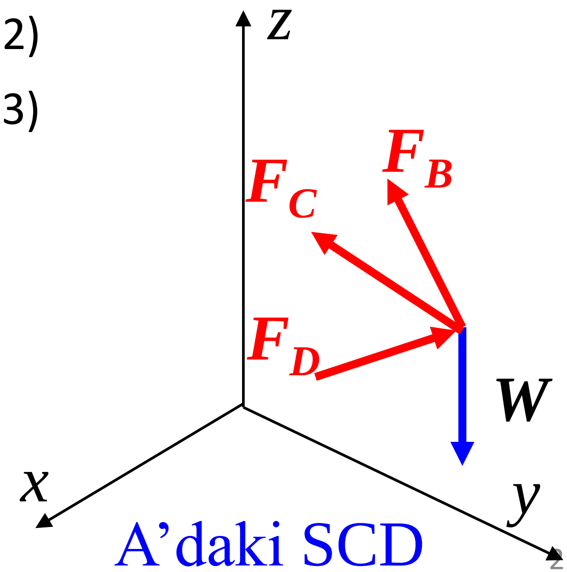
$\sum F_z = (1{,}5 / 6{,}5)\, F_B + (3 / 7)\, F_C + (2{,}5 / 6{,}5)\, F_D - 400 = 0$ (3)

Yukarıdaki denge denklemleri çözülürse;

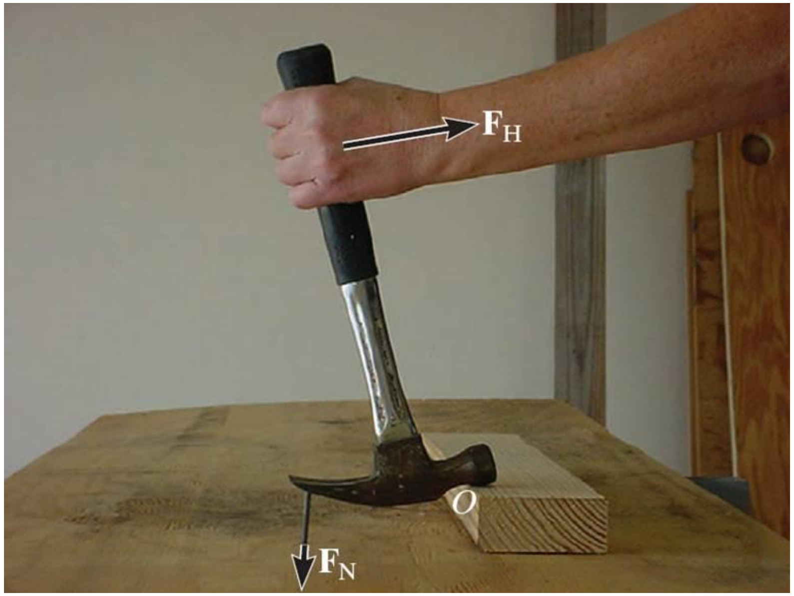
$F_B = 274$ N

$F_C = 294$ N

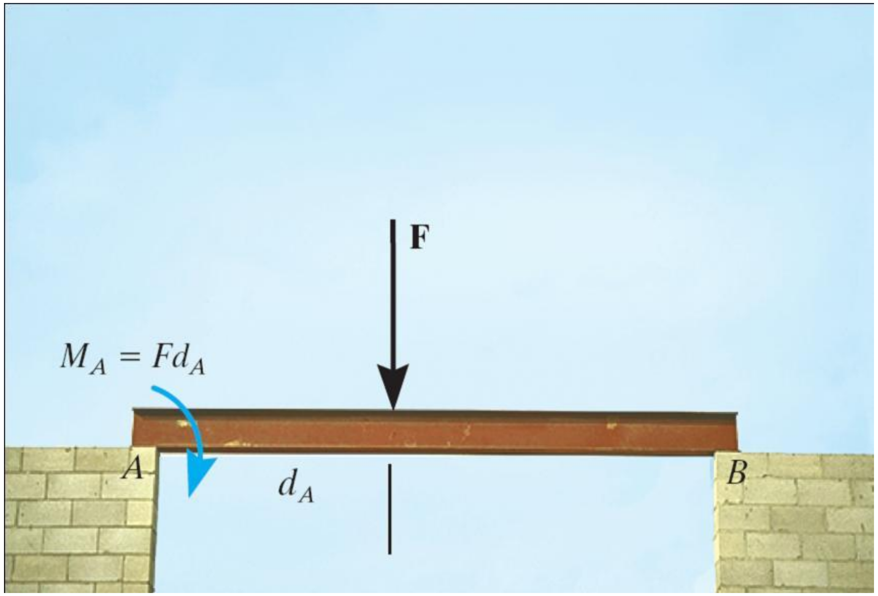
$F_D = 547$ N



BİR KUVVETİN MOMENTİ (SKALER GÖSTERİM), ÇAPRAZ ÇARPIM, BİR KUVVETİN MOMENTİ (VEKTÖREL GÖSTERİM) VE MOMENTLERİN PRENSİBİ



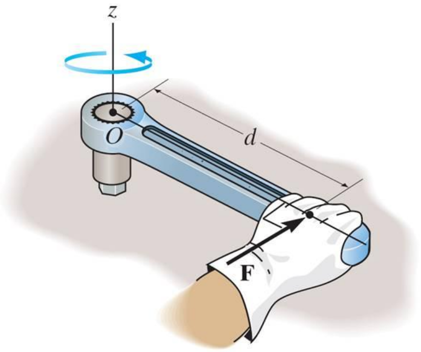
Marangozlar çakılmış bir çiviyi çıkarmak için çekici genellikle böyle kullanırlar. Çekicin sapındaki FH kuvveti nasıl bir etkiyle çiviyi çıkarmaktadır? FH kuvvetinin O noktasındaki etkisini matematiksel olarak nasıl modelleyebiliriz?



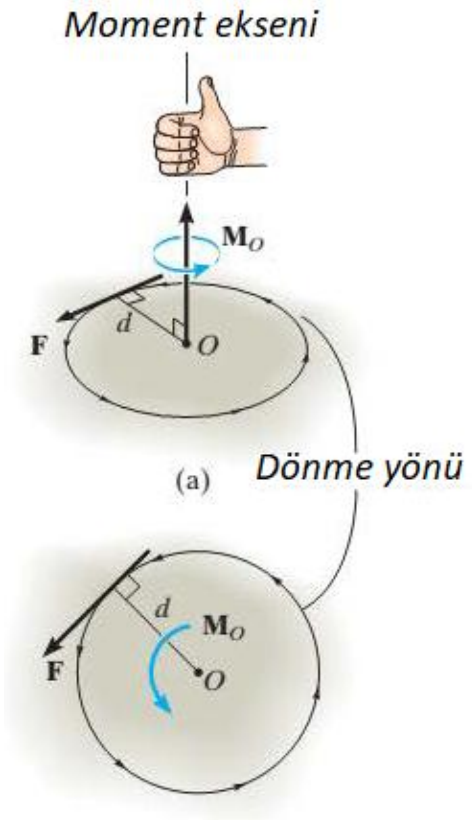
Kirişler genellikle duvarlardaki boşlukları geçmek için kullanılır. Üzerindeki kuvvetin kirişe ne gibi bir etkisi olduğunu bulmak için kirişin, mesnetlerine olan etkisini bilememiz gerekir. A ve B noktalarında ne olduğunu tahmin edebilir misiniz?

Bir kuvvetin momenti – skaler gösterim

•Bir kuvvetin bir nokta etrafındaki momenti, o yönde döndürme eğiliminin bir ölçüsüdür (bazen tork olarak da isimlendirilir).



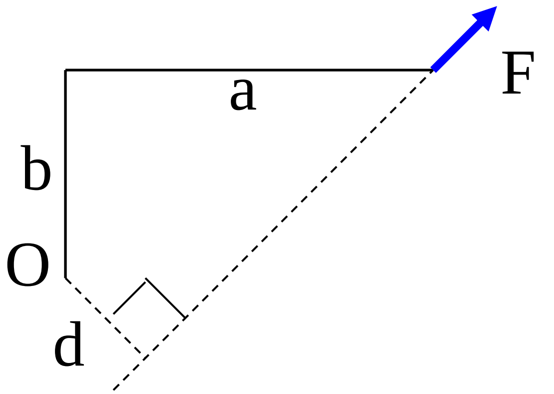
•Yandaki şekilden görüldüğü gibi, O noktasından kuvvetin **etki çizgisine** olan **dik mesafe d ’dir.** İki boyutta, kuvvetin yönü ve dolayısıyla dönme eğilimine bağlı olarak M_O ’nun yönü saat ibreleri yönünde veya saat ibrelerine ters yönde olabilir.



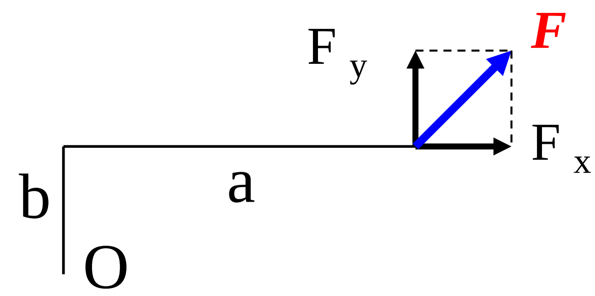
Şiddeti “$M_0 = F \cdot d$” olan momentin doğrultusu sağ el kuralı kullanılarak belirlenir. Momentin birimi Nm, kNcm vb.’dir.

Bir kuvvetin momenti – skaler gösterim

•Örneğin aşağıdaki çizimde M_O = F d ve yönü saat ibrelerinin tersi yöndedir.



•M_O momentini hesaplamanın kestirme yolu F kuvvetini bileşenlerine ayırmaktır.



$$M_O = (F_y\,a) - (F_x\,b)$$

Şeklinde ifade edilebilir. Görüleceği üzere F_y kuvvetinin yarattığı moment +, F_x kuvvetinin yarattığı moment ise – değer almıştır.

İki boyutlu bir moment için tipik işaret kabulünde saat ibrelerinin tersi yön pozitiftir. O noktasına bağlı cismin ne yöne döndüğü, bileşke momentin (M_O) nihai yönü belirlenerek tayin edilir.

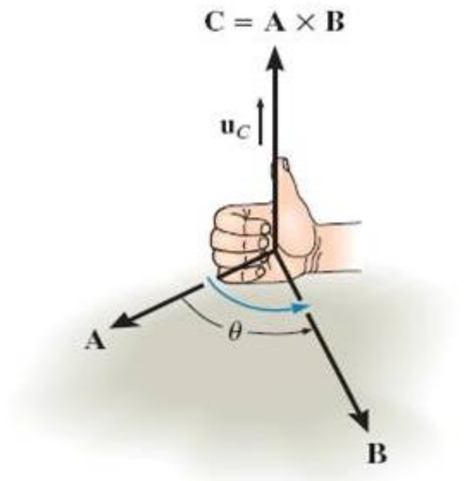
Vektörlerin çapraz (vektörel) çarpımı

•İki boyutta, eğer d dik (moment kolu) mesafesini biliyorsak bir kuvvetin momentini bulmak oldukça kolaydır.

•Eğer üç boyutlu kuvvetler ile çalışılıyorsa, dik mesafenin bulunması zor olabilir.

•Bir kuvvetin momentini bulmak için kullanılan genel yöntem, ***iki vektörün çapraz çarpımı (vektörel çarpımı)*** olarak adlandırılan vektörel bir işlemdir.

•Vektörel çarpım iki boyutlu (eş düzlemli) durumlar için de sonuç verir.



Genelde ***A*** ve ***B*** gibi iki vektörün çapraz çarpımı ***C*** gibi diğer bir vektörle sonuçlanır.

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}.$$

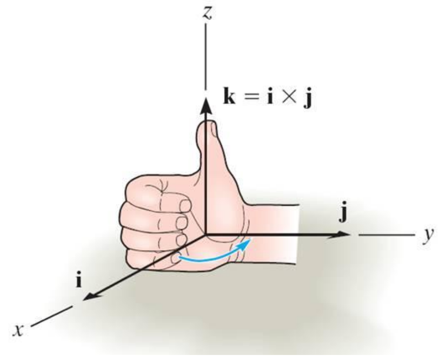
Sonuç vektörün büyüklüğü ve yönü şöyle yazılabilir;

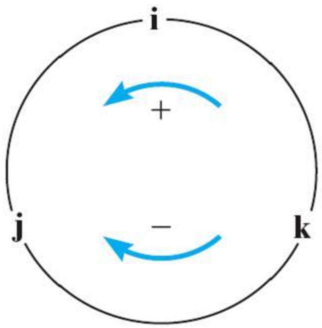
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \overbrace{A\,B \sin\theta}^{\text{büyüklük}}\ \boldsymbol{u_C} \quad (0 \leq \theta \leq 180°)$$

$\boldsymbol{u_C}$ A ve B vektörlerine (veya onların bulundukları düzleme) dik birim vektördür.

Vektörlerin çapraz (vektörel) çarpımı

•Sağ el kuralı, çapraz çarpım ile bulunan vektörün yönünü hesaplarken kullanılabilecek çok yararlı bir araçtır.





•Örnek verecek olursak ***i*** × ***j* = *k***

•Bir vektör kendisiyle çapraz çarpıldığında sonuç sıfırdır ***i*** × ***i* = *0***

•Vektörel çarpım determinant olarak ifade edilebilir.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

•Her bir bileşen 2 × 2 determininant kullanılarak belirlenebilir.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{i}: \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y)$$

$$\mathbf{j}: \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\mathbf{j}(A_xB_z - A_zB_x)$$

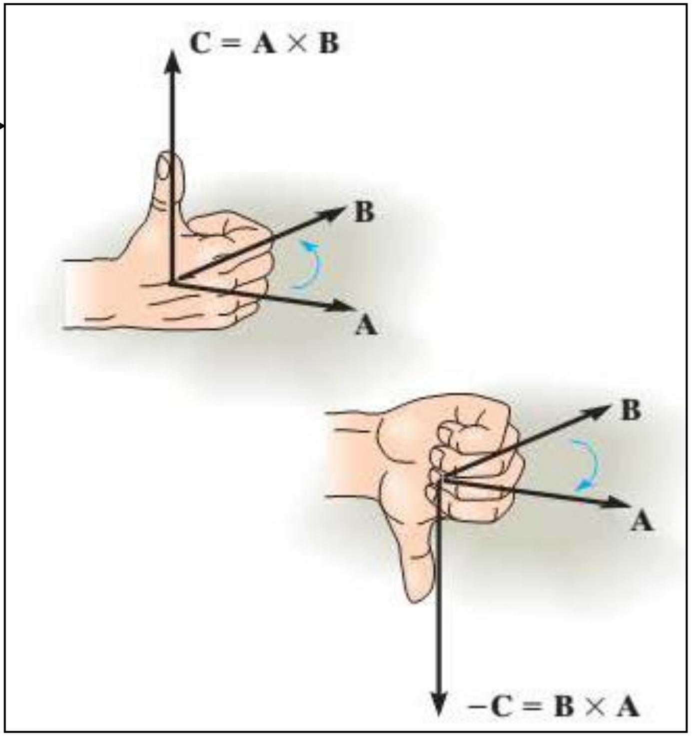
Negatif işaret unutulmamalı!

$$\mathbf{k}: \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

Çapraz (vektörel) çarpım kuralları

•Vektörel çarpımın değişme özelliği yoktur;

$$\boxed{A \, x \, B \neq B \, x \, A \quad \Rightarrow A \, x \, B = -B \, x \, A}$$



•Bir vektörel çarpım, skaler büyüklük ile çarpılabilir;

$$a\,(A \, x \, B) = \underbrace{(aA) x \, B}_{} = \underbrace{A \, x \, (aB)}_{} = \underbrace{(A \, x \, B) a}_{}$$

her durumda şiddeti aynıdır $= |a| A \, B \, Sin\theta$

yönü belirleyen ise A ve B 'nin çarpım sırasıdır.

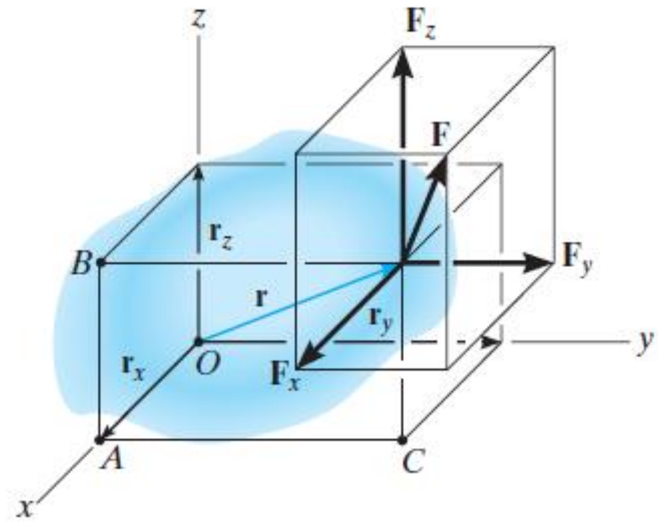
•Vektörel çarpımın dağılma özelliği vardır.

$$\boxed{A \, x \, (B + D) = (A \, x \, B) + (A \, x \, D)}$$

Bir kuvvetin momenti – vektörel gösterim

•3B uzaydaki momentler skaler (2B) yaklaşım kullanılarak hesaplanabilir, fakat bu zordur ve zaman alıcıdır.

•Bu sebeple, vektörel/çapraz çarpım olarak adlandırılan matematiksel bir yaklaşım kullanmak daha kolaydır.

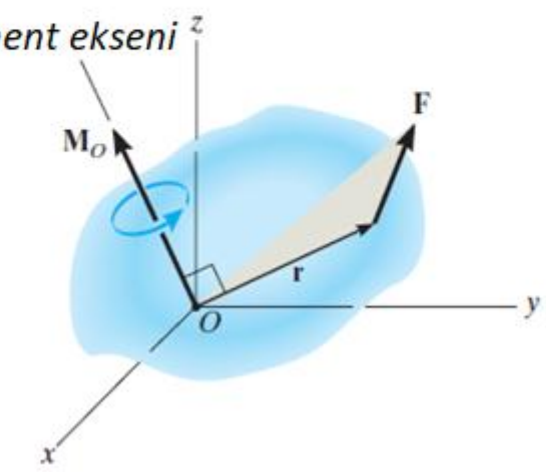


•Vektörel çarpım kullanılarak;

$\boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ diğer bir gösterimle $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$

Önemli: $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r}$ vektörel çarpımda hatalı sonuç verir. Değişme özelliği yok!

•Burada ***r*** , O noktasından ***F*** vektörünün tesir çizgisi üzerindeki herhangi bir noktaya doğru olan konum vektörüdür .



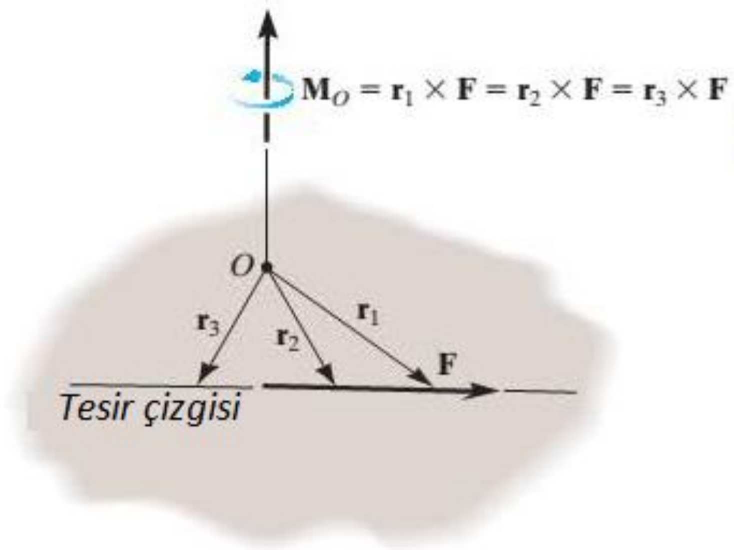
Bir kuvvetin momenti – vektörel gösterim

- O noktasından ***F*** kuvvetinin etki çizgisinin herhangi bir yerine ölçülen ***r*** vektörü moment hesabı için kullanılabilir.

- F kuvveti, etki çizgisi üzerinde herhangi bir yere etkiyebilir, ve O noktasında aynı moment etkisini yaratır.

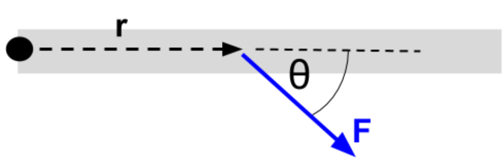
- Yandaki denklemin fiziksel anlamı, kuvvet bileşenlerinin ayrı ayrı ele alınması ve 2D yaklaşımının aynen kullanılması olarak da açıklanabilir.

(Skaler değeri $M_O = r\,F\,\mathrm{Sin}\,\theta$ olur)



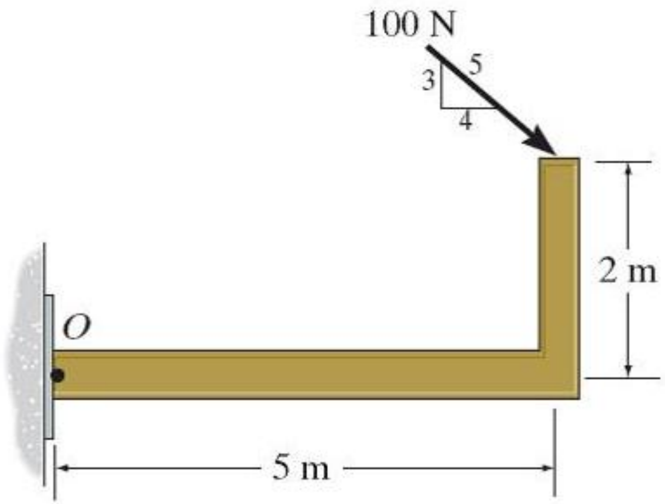
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}}$$



$$M_O = (r_y\,F_z - r_z\,F_y)\,\boldsymbol{i} - (r_x\,F_z - r_z\,F_x)\,\boldsymbol{j} + (r_x\,F_y - r_y\,F_x)\,\boldsymbol{k}$$

Örnek-1



•**Soru:** Çerçeveye şekilde görüldüğü gibi 100 N'luk bir kuvvet etkimektedir. Kuvvetin O noktasında yarattığı momenti hesaplayınız.

•**Çözüm**: Düzlemsel (2B) bir kuvvet sistemi olduğundan F kuvveti x ve y doğrultusunda bileşenlerine ayrılır. Her bir bileşenin O noktasında yarattığı moment skaler analizle belirlenir. Bileşke moment yönlere dikkat ederek toplama işlemiyle elde edilir.

$+\uparrow F_y = \underline{-100\,(3/5)\text{ N}}$

$+\rightarrow F_x = \underline{100\,(4/5)\text{ N}}$

$+\ M_O = \{-100\,(3/5)\text{N}\,(5\text{ m}) - (100)(4/5)\text{N}\,(2\text{ m})\}\text{ N·m}$

$= \underline{-460\text{ N·m}}$ or $\underline{460\text{ N·m CW}}$

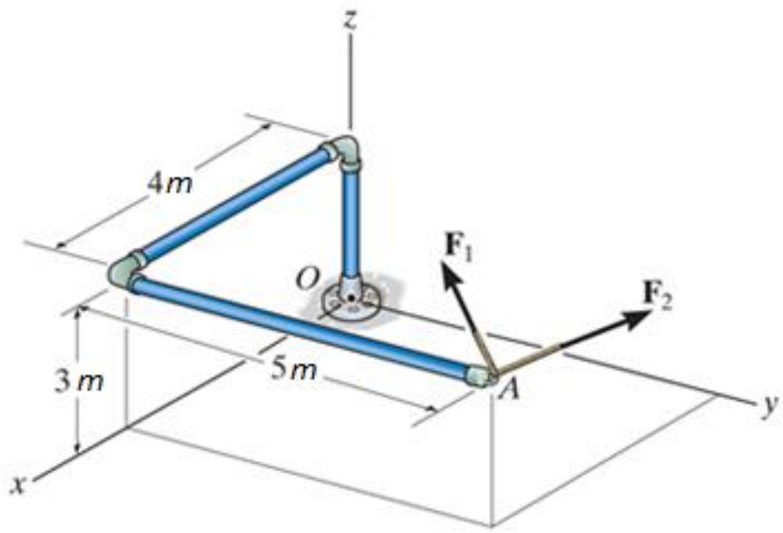
Örnek-2

•Soru:

$\boldsymbol{F_1}$={100 $\boldsymbol{i}$ - 120 $\boldsymbol{j}$ + 75 $\boldsymbol{k}$} N

$\boldsymbol{F_2}$={-200 $\boldsymbol{i}$ +250 $\boldsymbol{j}$ + 100 $\boldsymbol{k}$}N ise

O noktasında oluşan momenti hesaplayınız.



•Çözüm:

Önce bileşke kuvvet $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}$ ve konum vektörü $\boldsymbol{r_{OA}}$ bulunur. Sonra $\boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{r_{OA}} \times \boldsymbol{F}$ vektörel çarpımı yapılır.

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}$

= { (100 - 200) $\boldsymbol{i}$ + (-120 + 250) $\boldsymbol{j}$ + (75 + 100) $\boldsymbol{k}$} N

= {-100 $\boldsymbol{i}$ +130 $\boldsymbol{j}$ + 175 $\boldsymbol{k}$} N

$\boldsymbol{r_{OA}}$ = {4 $\boldsymbol{i}$ + 5 $\boldsymbol{j}$ + 3 $\boldsymbol{k}$} m

$$\boldsymbol{M_O} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 5 & 3 \\ -100 & 130 & 175 \end{vmatrix}$$

= [{5(175) – 3(130)} $\boldsymbol{i}$ – {4(175) – 3(-100)} $\boldsymbol{j}$ + {4(130) – 5(-100)} $\boldsymbol{k}$] Nm

= {485 $\boldsymbol{i}$ – 1000 $\boldsymbol{j}$ + 1020 $\boldsymbol{k}$} Nm

Örnek-3

•**Soru:** F kuvvetinin A noktasında oluşturduğu momenti hesaplayınız.

•**Çözüm**: $\boldsymbol{F}$ kartezyen formda ifade edilir. $\boldsymbol{r}_{AC}$ konum vektörü bulunur. $\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{r}_{AC} \times \boldsymbol{F}$ işlemi ile moment vektörel olarak bulunur.

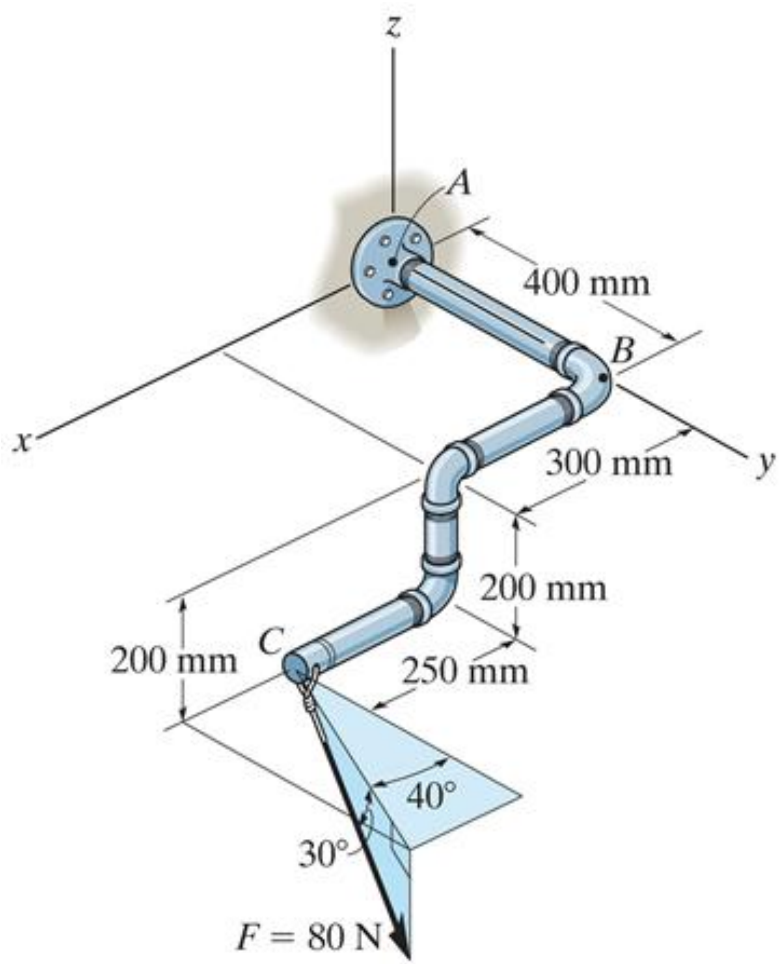
$$\boldsymbol{F} = \{ (80 \cos 30) \sin 40\, \boldsymbol{i} + (80 \cos 30) \cos 40\, \boldsymbol{j} - 80 \sin 30\, \boldsymbol{k} \} \text{ N}$$

$$= \{44{,}53\, \boldsymbol{i} + 53{,}07\, \boldsymbol{j} - 40\, \boldsymbol{k} \} \text{ N}$$

$$\boldsymbol{r}_{AC} = \{0{,}55\, \boldsymbol{i} + 0{,}4\, \boldsymbol{j} - 0{,}2\, \boldsymbol{k} \} \text{ m}$$

$$\boldsymbol{M}_A = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0{,}55 & 0{,}4 & -0{,}2 \\ 44{,}53 & 53{,}07 & -40 \end{vmatrix}$$

$$= \{ -5{,}39\, \boldsymbol{i} + 13{,}1\, \boldsymbol{j} + 11{,}4\, \boldsymbol{k} \} \text{ N·m}$$



Faydalanılan kaynaklar:

Mühendislik Mekaniği - Statik, R.C. Hibbeler, S.C. Fan
(Mühendislik Mekaniği – Statik'in Pearson yayınevi tarafından hazırlanan İngilizce sunumları)
Kisi.deu.edu.tr/serkan.misir (Pearson yayınevi tarafından hazırlanan sunumların Türkçe çevirisi)
http://blog.nsta.org