STATİK

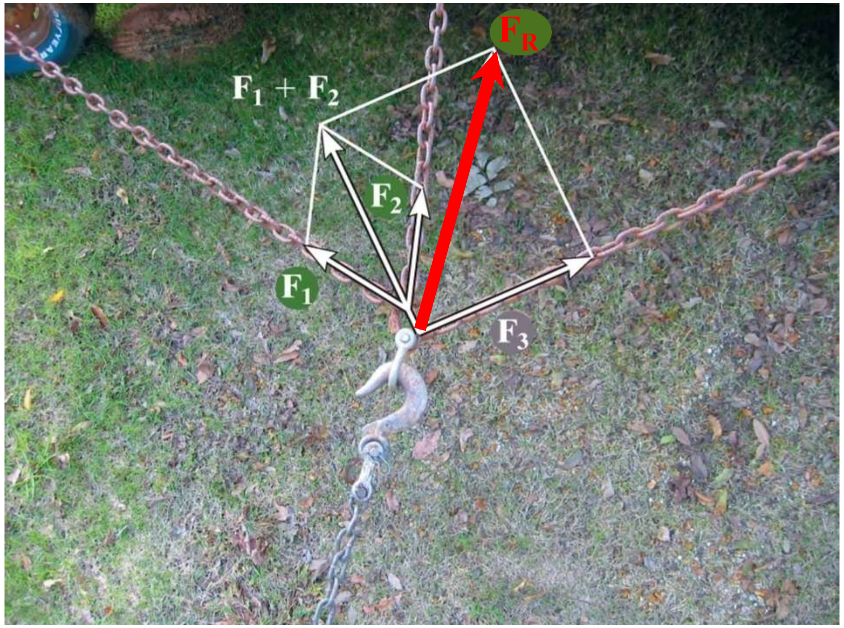
(MADEN MÜHENDİSLİĞİ)

Dr. Öğr. Üyesi Çağlar YALÇINKAYA

(Dokuz Eylül Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü)

Ders notları için: www.caglaryalcinkaya.com

KUVVET VEKTÖRLERİ



Şekildeki kancaya zincirler üzerinden kesişen üç kuvvet etkimektedir.

Kancanın göçüp göçmeyeceğine (Eğilerek veya koparak) karar vermemiz gerekiyor.

Bunu yapabilmek için üç zincir üzerinden aktarılan kuvvetlerin bileşkesini bilmemiz gerekir.

Skaler ve vektörel büyüklükler

•**Skaler büyüklük:** Yalnızca sayısal bir değeri tanımlamakta kullanılır. Pozitif veya negatif olabilir. Kütle, hacim ve uzunluk sıkça kullanılan skaler büyüklüklerdir.

•**Vektörel büyüklük:** Şiddet, doğrultu ve yön ile tanımlanan fiziksel bir büyüklüktür. Kuvvet, moment, konum vektörel büyüklüklerdir.

	Skalerler	***Vektörler***
Örnekler:	Kütle, Hacim	Kuvvet, Hız
Özelliği:	Bir büyüklüğü vardır (pozitif veya negatif)	Bir büyüklüğü vardır ve bir yönü
Toplama kuralı:	Basit Aritmetik	Paralelkenar kuralı
Özel gösterim:	Yok	Kalın font, bir çizgi veya bir ok

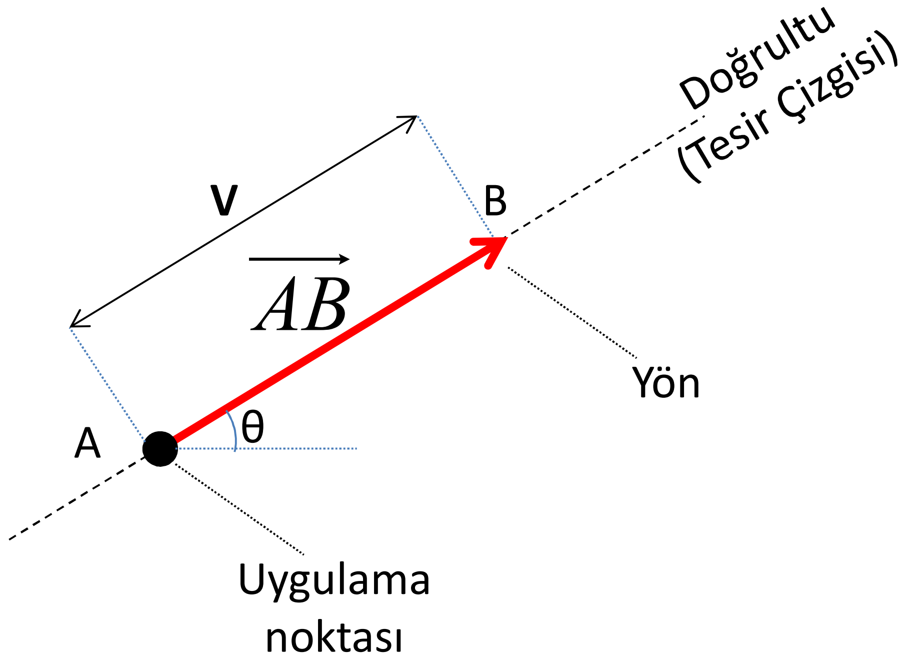
Bu sunumlarda, vektörler ***bunun gibi*** (**kalın**, *italik* ve kırmızı) olarak gösterilecektir.

Kuvvet vektörüne bakış

•A noktasına etkiyen şekildeki kuvvet bir vektörel büyüklüktür. Yönü A’dan B’ye doğrudur. $\overrightarrow{AB}$ veya $\vec{V}$ gibi bir üzerinde ok olan harf/harfler ile gösterilir.

•Uygulama noktası, büyüklüğü, doğrultusu ve yönü ile tanımlanır.

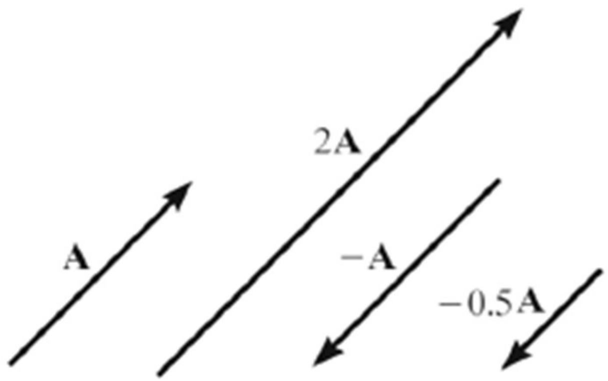
•Bu şekilde gösterilen vektörün büyüklüğü (şiddeti) “**AB**” veya $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ şeklinde ifade edilir.



Vektörel işlemler

- **Vektörün bir skalerle çarpımı / skalere bölümü:** Çarpımın sonucu vektörle aynı doğrultuda bir vektördür. Eğer çarpım katsayısı (skaler) pozitif ise vektörün yönü aynı kalır. Özetle vektörün şiddeti ile skaler çarpılır.

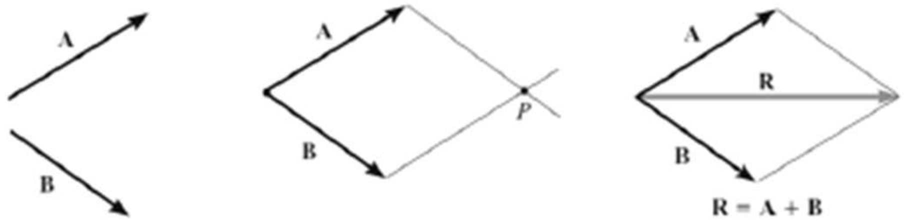
$$k.\vec{V}$$



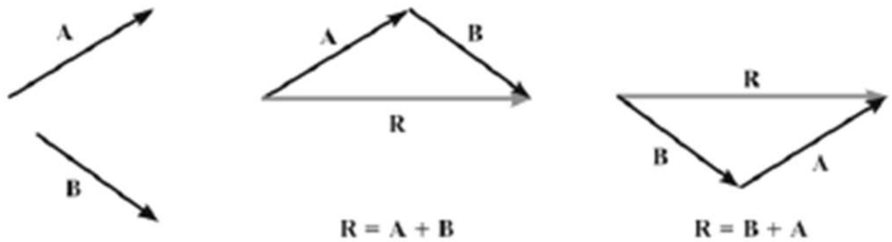
Vektörel işlemler

• **İki vektörün toplanması / çıkarılması :** Üçgen veya paralel kenar ilkesi ile iki türlü işlem yapılabilir. Çıkartma işleminde vektörün doğrultusu (tesir çizgisi) aynı kalırken yönü ters çevrilir ve aşağıdaki işlemler tekrarlanır.

Paralelkenar yöntemi



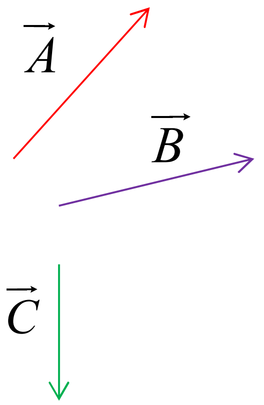
Üçgen yöntemi (uç uca ekleme)

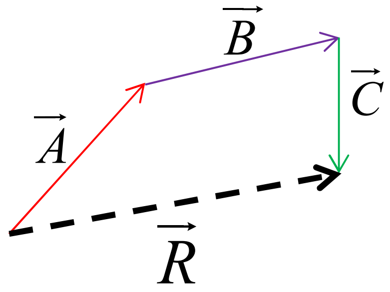


Vektörel işlemler

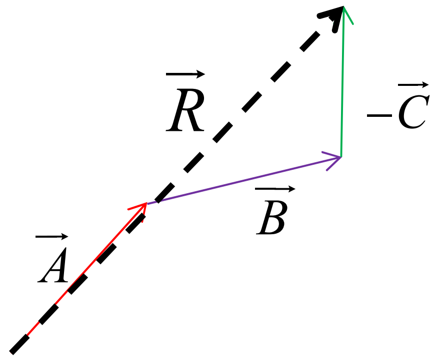
• **Çok sayıda vektörün toplanması / çıkarılması :** Yine üçgen veya paralel kenar ilkesi ile iki türlü işlem yapılabilir. Paralel kenarda iki vektörün toplanması/çıkartılması sonucu oluşan bileşke vektör ile üçüncü vektör arasında işlem yapılır. Üçgen yönteminde ise uç uca ekleme işlemi aynen uygulanır.

•Üçten fazla vektör olması durumunda <u>üçgen yöntemi daha pratiktir</u>.





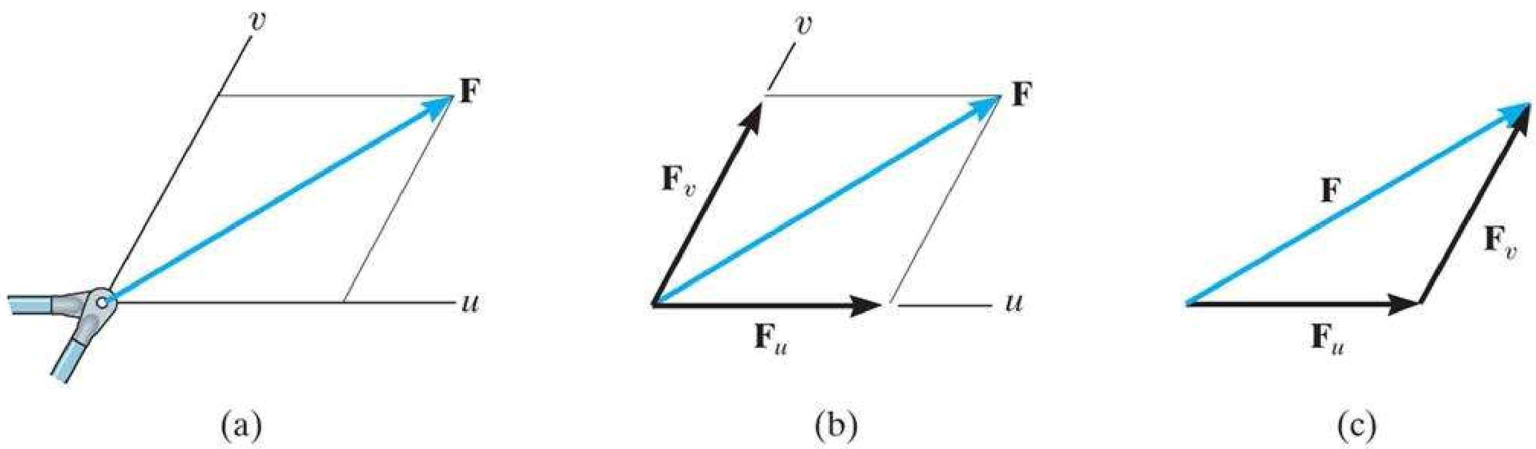
$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{R}$$



$$\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} = \vec{R}$$

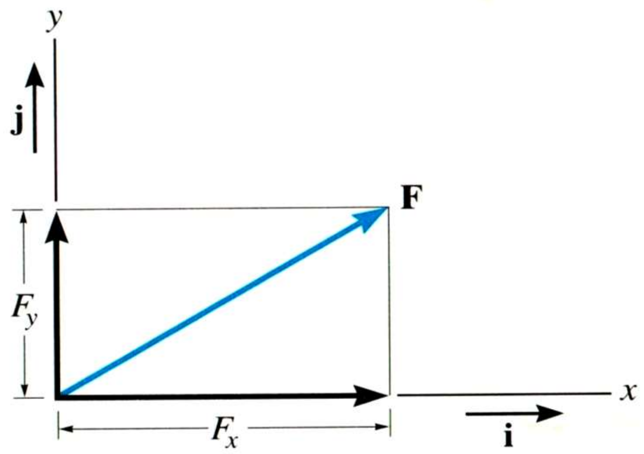
Vektörel işlemler

• **Vektörlerin bileşenlerine ayrılması:** Bir vektörü bileşenlerine ayırmak, aynı vektörü birden fazla sayıda vektörle ifade etmek demektir. Paralel kenar yöntemi terse doğru işletilir.

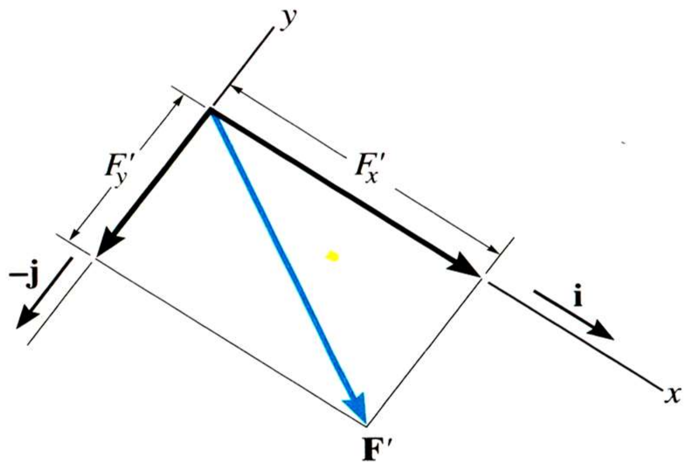


Vektörel işlemler

• **Aynı düzlemdeki vektörler sisteminin toplanması:** Vektörler, x ve y kartezyen takımı kullanılarak bileşenlerine ayrılır. Şekilde vektörün her bir bileşeni büyüklük (şiddet) ve yön olarak gösterilmektedir. Yönler x ve y ekseni esasındadır. <u>x ve y eksenlerini tanımlamak için sırasıyla i ve j birim vektörlerini</u> kullanırız. Eksenler her zaman birbirine diktir. Her iki eksen bir çift olarak herhangi bir eğimle verilebilir.



(a)



(b)

$$\boldsymbol{F} = F_x\,\boldsymbol{i} + F_y\,\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{F'} = F'_x\,\boldsymbol{i} + (-\,F'_y)\,\boldsymbol{j}$$

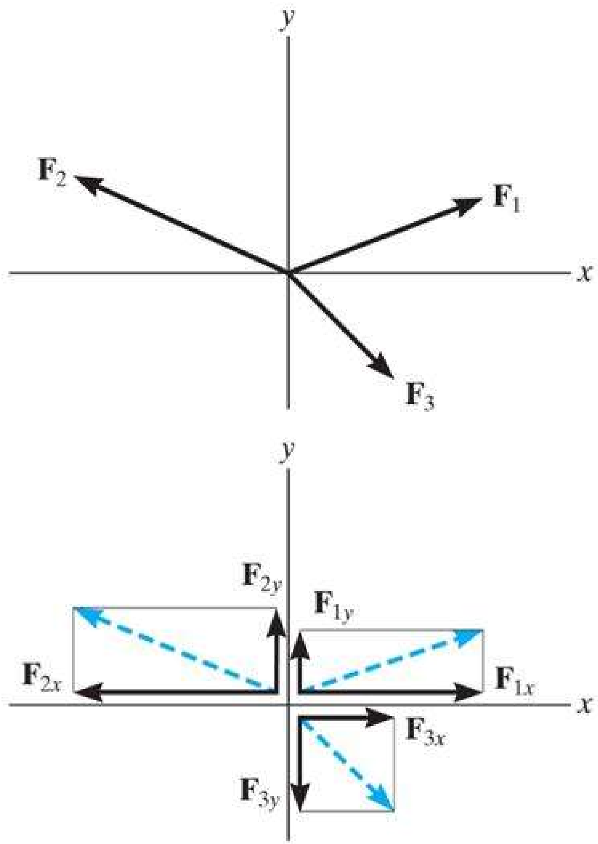
Vektörel işlemler

- **Çok sayıda vektörün toplanması:**

1. Adım: Her bir vektör bileşenlerine ayrılır.

2. Adım: Tüm x bileşenleri toplanır. Ardından tüm y bileşenleri toplanır. Bu x ve y toplamları, bileşke kuvvetin x ve y bileşenlerine tekabül eder.

3. Adım: Bileşke vektörün büyüklüğü bulunur ve açısı hesaplanır.



Vektörel işlemler

- **Şekildeki sistemi örneklersek;**

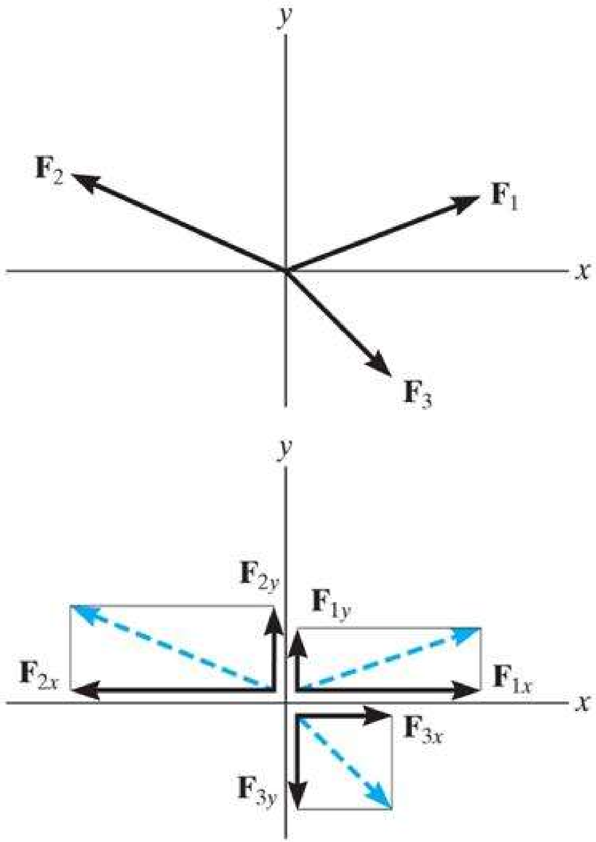
Bileşenlerine ayrılan vektörlerin x ve y toplamları alınır. Bu toplamlar bileşke vektörün bileşenlerini oluşturur.

$$\boldsymbol{F_R} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3}$$

$$= F_{1x}\,\boldsymbol{i} + F_{1y}\,\boldsymbol{j} - F_{2x}\,\boldsymbol{i} + F_{2y}\,\boldsymbol{j} + F_{3x}\,\boldsymbol{i} - F_3y\,\boldsymbol{j}$$

$$= (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})\,\boldsymbol{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\,\boldsymbol{j}$$

$$= (F_{Rx})\,\boldsymbol{i} + (F_{Ry})\,\boldsymbol{j}$$



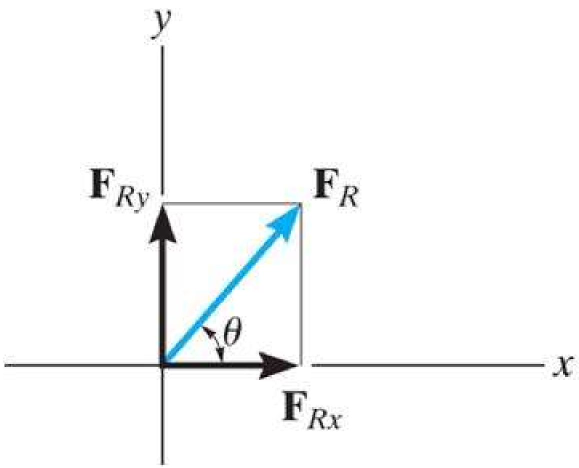
Vektörel işlemler

- **Şekildeki sistemi örneklersek;**

Son olarak bileşke vektörün şiddeti ve x-ekseniyle açısı hesaplanır.

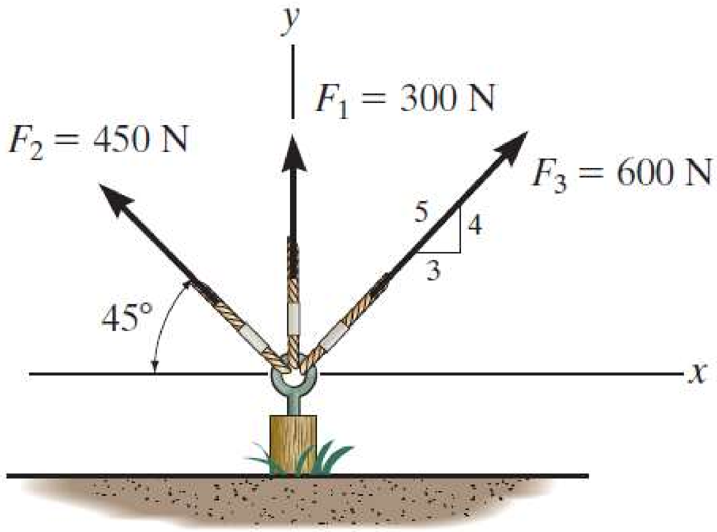
$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right|$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$



Örnek-1

•**Soru:** Bir çadır kazığına şekilde verilen halatlardan üç kuvvet etkimektedir. Bileşke kuvvetin büyüklüğünü ve açısını bulunuz.



•**Çözüm**: Kuvvetler x ve y bileşenlerine ayrılır, bileşenler toplanarak bileşke kuvvet vektörünün bileşenleri tespit edilmiş olur. Bu bileşenlerle büyüklük ve açı hesaplanabilir.

$$\boldsymbol{F_1} = \{0\ \boldsymbol{i} + 300\ \boldsymbol{j}\}\ \mathrm{N}$$

$$\boldsymbol{F_2} = \{-450 \cos(45°)\ \boldsymbol{i} + 450 \sin(45°)\ \boldsymbol{j}\}\ \mathrm{N}$$

$$= \{-318{,}2\ \boldsymbol{i} + 318{,}2\ \boldsymbol{j}\}\ \mathrm{N}$$

$$\boldsymbol{F_3} = \{(3/5)\ 600\ \boldsymbol{i} + (4/5)\ 600\ \boldsymbol{j}\}\ \mathrm{N}$$

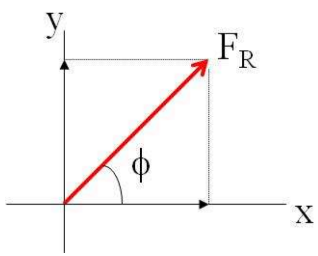
$$= \{360\ \boldsymbol{i} + 480\ \boldsymbol{j}\}\ \mathrm{N}$$

$$\boldsymbol{FR} = \{(0 - 318{,}2 + 360)\ \boldsymbol{i} + (300 + 318{,}2 + 480)\ \boldsymbol{j}\}\ \mathrm{N}$$

$$= \{41{,}80\ \boldsymbol{i} + 1098\ \boldsymbol{j}\}\ \mathrm{N}$$

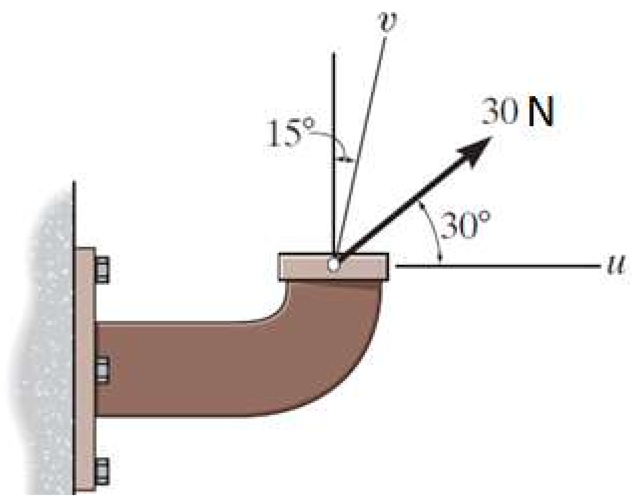
$$F_R = ((41{,}80)^2 + (1098)^2)^{1/2} = \underline{1099\ \mathrm{N}}$$

$$\phi = \tan^{-1}(1098/41{,}80) = \underline{87{,}8°}$$

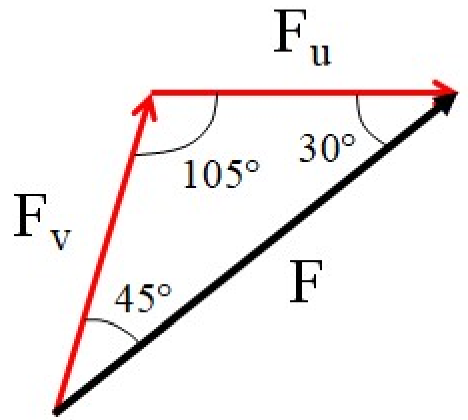


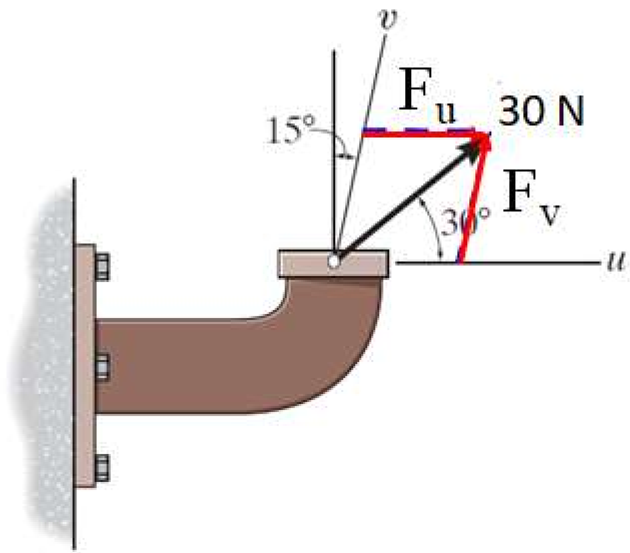
Örnek-2

•**Soru:** Şekildeki boruya etkiyen 30 N'luk kuvveti u ve v eksenleri boyunca bileşenlerine ayırınız ve her bir bileşenin büyüklüğünü belirleyiniz.



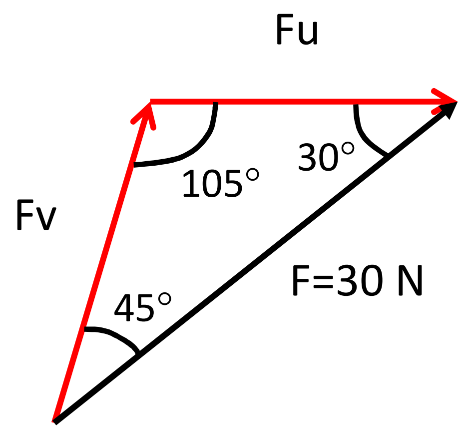
•**Çözüm**: Paralel kenar ilkesi kapsamında u ve v eksenlerine paraleller çizilir. Kuvvet bileşenlerine ayrılır ve sinüs kuralı ile bileşenlerin büyüklüğü belirleyiniz.

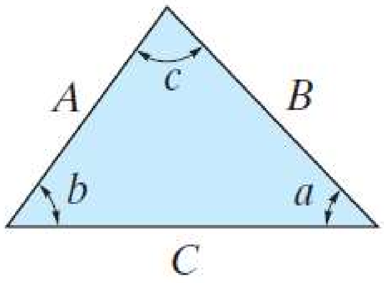




Örnek-2

•**Çözüm**: Paralel kenar ilkesi kapsamında u ve v eksenlerine paraleller çizilir. Kuvvet bileşenlerine ayrılır ve sinüs kuralı ile bileşenlerin büyüklüğü belirleyiniz.





Sinüs kuralı

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

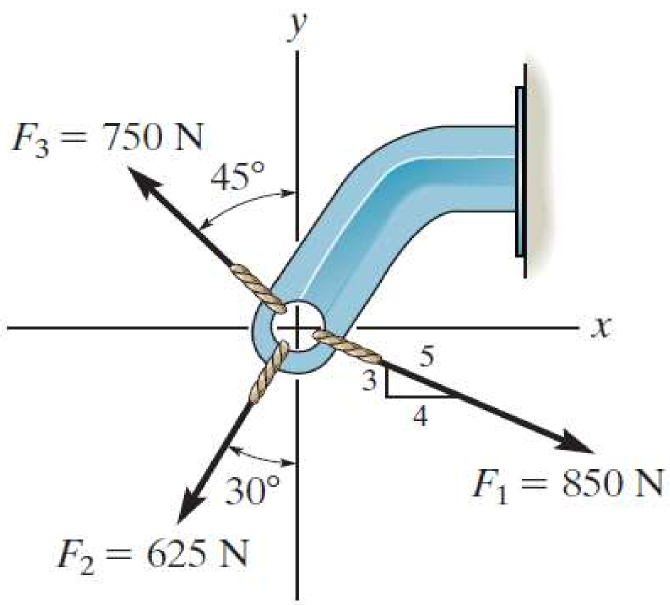
$$\frac{30}{\sin 105^\circ} = \frac{F_u}{\sin 45^\circ} = \frac{F_v}{\sin 30^\circ}$$

Fu = (30/sin105°) sin 45° = 22,0 N

Fv = (30/sin105°) sin 30° = 15,5 N

Örnek-3

•**Soru**: Yandaki şekilde verilen dirseğe etkiyen üç kuvvetin bileşkesini bulunuz. Bileşke kuvvetin büyüklüğünü ve açısını hesaplayarak çizimle gösteriniz.



•**Çözüm**: Kuvvetler bileşenlerine ayrılır. Ayrılan bileşenler x ve y akslarınca toplanarak bileşke kuvvetin bileşenleri elde edilir. Büyüklük ve açı bulunur.

$$\boldsymbol{F_1} = \{850\,(4/5)\,\boldsymbol{i} - 850\,(3/5)\,\boldsymbol{j}\}\text{ N}$$

$$= \{680\,\boldsymbol{i} - 510\,\boldsymbol{j}\}\text{ N}$$

$$\boldsymbol{F_2} = \{-625\sin(30°)\,\boldsymbol{i} - 625\cos(30°)\,\boldsymbol{j}\}\text{ N}$$

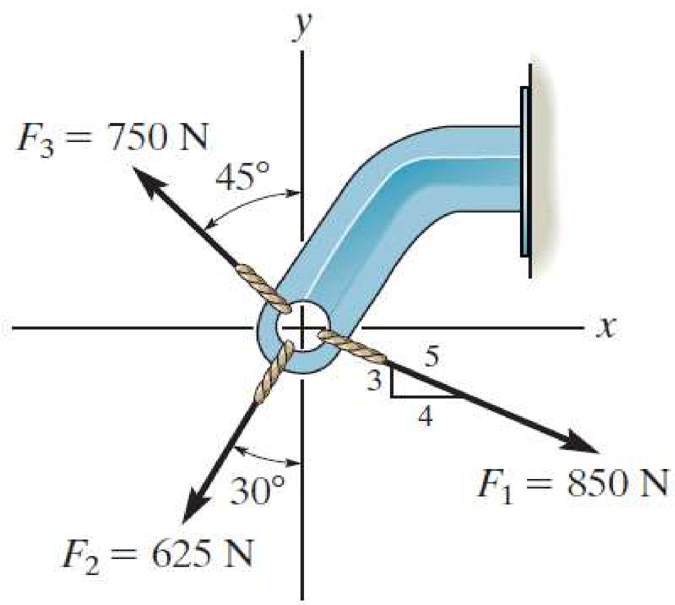
$$= \{-312{,}5\,\boldsymbol{i} - 541{,}3\,\boldsymbol{j}\}\text{ N}$$

$$\boldsymbol{F_3} = \{-750\sin(45°)\,\boldsymbol{i} + 750\cos(45°)\,\boldsymbol{j}\}\text{ N}$$

$$\{-530{,}3\,\boldsymbol{i} + 530{,}3\,\boldsymbol{j}\}\text{ N}$$

Örnek-3

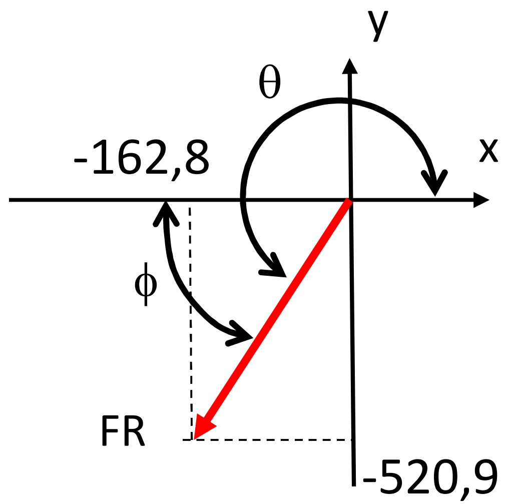
•**Çözüm**: Kuvvetler bileşenlerine ayrılır. Ayrılan bileşenler x ve y akslarınca toplanarak bileşke kuvvetin bileşenleri elde edilir. Büyüklük ve açı bulunur.



i ve j bileşenleri toplanır,

$$\boldsymbol{F}_R = \{ (680 - 312{,}5 - 530{,}3)\,\boldsymbol{i} + (-510 - 541{,}3 + 530{,}3)\,\boldsymbol{j} \}\text{N}$$

$$= \{- 162{,}8\,\boldsymbol{i} - 520{,}9\,\boldsymbol{j}\ \}\ \text{N}$$



Büyüklük ve açı hesaplanır,

$F_R = ((- 162{,}8)^2 + (- 520{,}9)^2)^{½} = \underline{546\ \text{N}}$

$\phi = \tan^{-1}(520{,}9 / 162{,}8) = \underline{72{,}6°}$

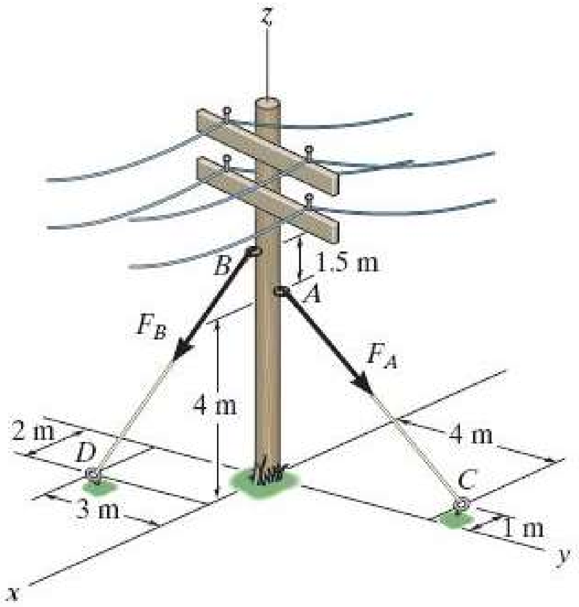
Pozitif x eksenine göre, $\theta = 253°$

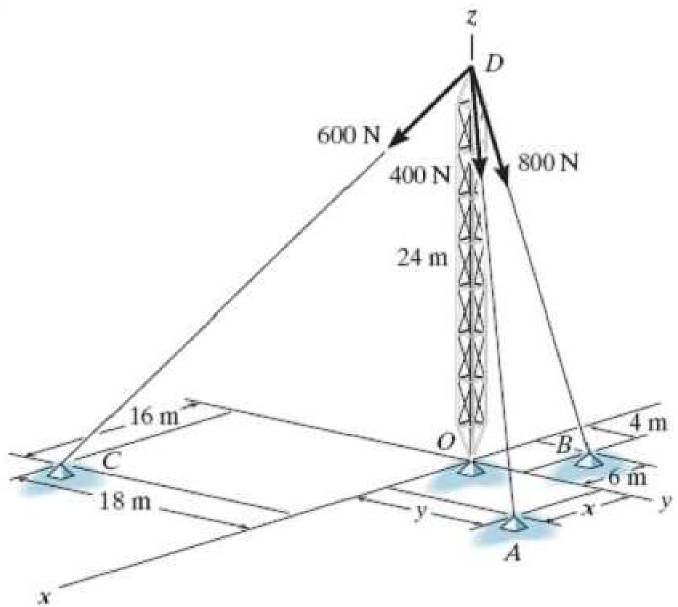
Kartezyen vektörler- toplanması ve çıkarılması

• Çoğu yapı ve mühendislik elemanı ancak üç boyutlu uzayda tanımlanabilir.

•Elektrik direğinin sert rüzgarlarda sabit (yere dik kalması) için gergi telleri kullanılmıştır. Kartezyen vektörleri kullanarak gergi tellerindeki kuvveti nasıl gösterebiliriz?

•Aşağıdaki radyo kulesine bağlı her üç kablodaki kuvvetleri bilseydiniz, kulenin tepesindeki D noktasına etkiyen bileşke kuvveti nasıl hesaplardınız?





Kartezyen birim vektörler

•Vektörlerin sayısal büyüklükleri, kendi cinsinden (aynı doğrultu ve yönde) bir birim vektörle karşılaştırılarak bulunur. Diğer bir ifadeyle **bir birim vektör, vektörün doğrultu ve yönünü tanımlayan ve büyüklüğü birim olan vektördür**.

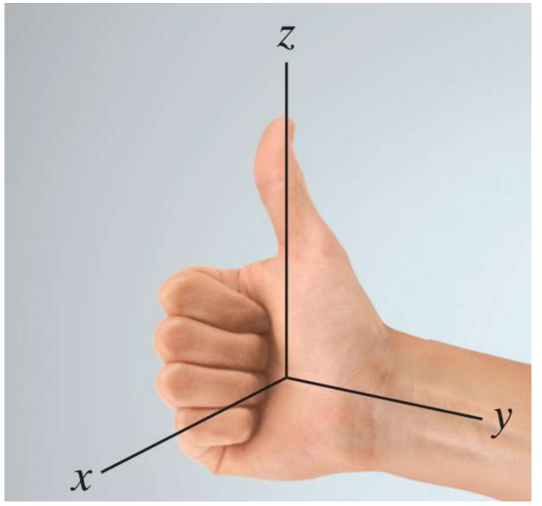
• Bir vektöre ait **birim vektör, vektörün kendi büyüklüğüne bölünmesiyle elde edilir**. A büyüklüğüne sahip ***A*** vektörü için birim vektör ($\boldsymbol{u}_A$) şu şekilde tanımlanır.

$\boldsymbol{u}_A = \boldsymbol{A} / A$ diğer bir gösterimle: $u_A = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

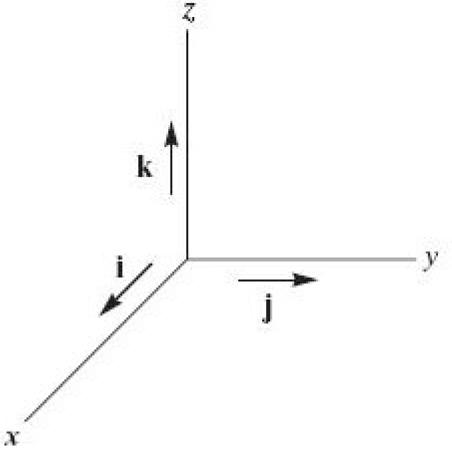
•Birim vektörün özellikleri:

Büyüklüğü 1'dir.
Boyutsuzdur (birimi yoktur).
Orijinal (***A***) vektör ile aynı yönlüdür

•Kartezyen eksen takımında birim vektörler ***i***, ***j*** ve ***k*** ile isimlendirilir. Bunlar sırasıyla pozitif x, y ve z eksen yönlerindeki birim vektörlerdir.



Sağ el koordinat sistemi



Kartezyen vektörlerin gösterimi

• Kenarları A_X, A_Y, ve A_Z metre uzunluğunda bir kutuyu ele alalım.

A vektörü aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

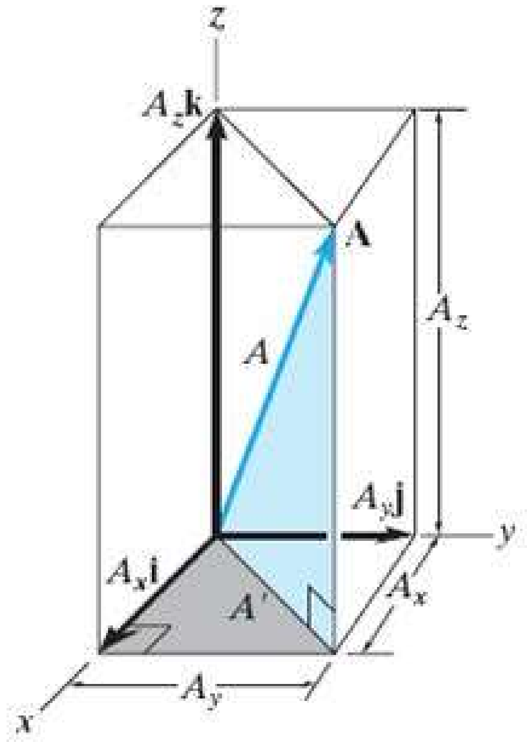
$\mathbf{A} = (A_X\, \mathbf{i} + A_Y\, \mathbf{j} + A_Z\, \mathbf{k})$ m

A vektörünün x-y düzlemi üzerindeki izdüşümü A´olur. A´ vektörünün büyüklüğü 2 boyutlu (2B) vektörlerle aynı şekilde bulunur.

$A' = (A_X^2 + A_Y^2)^{1/2}$

Konum vektörü ***A*** 'nın büyüklüğü şu şekilde elde edilir;

$A = ((A')^2 + A_Z^2)^{1/2} = (A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2)^{1/2}$



Kartezyen vektörlerin yönü

• A vektörünün yönü α, β, ve γ açıları ile tanımlanır.

•Bu açılar, vektör ve pozitif x, y ve z eksenleri arasında ölçülür, 0° ila 180° arasında bir değer alırlar.

•Trigonometri kullanılarak “Doğrultu (doğrultman) Kosinüsleri” bulunabilir.

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \quad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

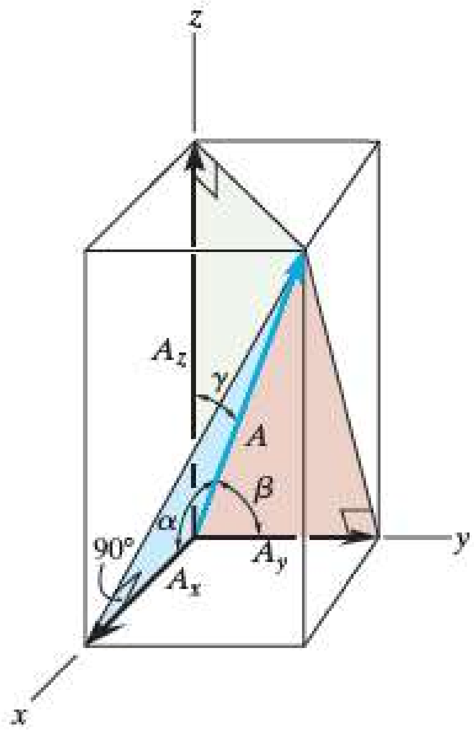
•Bu açılar şöyle bir ilişki içerisindedir;

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Bu sonuç, koordinat açılarının ve birim vektörlerin tanımından türetilebilir. Hatırlarsak, bir konum vektörünün birim vektörünü bulmak için gerekli bağıntı:

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k}$$

$$u_A = \cos\alpha\, \boldsymbol{i} + \cos\beta\, \boldsymbol{j} + \cos\gamma\, \boldsymbol{k}$$



Diğer gösterimle,

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\hat{i} + \frac{A_y}{A}\hat{j} + \frac{A_z}{A}\hat{k}$$

$$\vec{u}_A = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$$

Kartezyen vektörlerin toplanması

• Vektörler kartezyen formda ifade edildiklerinde, bunları toplamak ve çıkarmak kolaylaşır. İşlem 2B vektörlerin toplanmasıyla aynı temeldedir.

$$\boxed{\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k}}$$

Örneğin eğer,

$$\boldsymbol{A} = A_X\, \boldsymbol{i} + A_Y\, \boldsymbol{j} + A_Z\, \boldsymbol{k} \quad \text{ve}$$

$$\boldsymbol{B} = B_X\, \boldsymbol{i} + B_Y\, \boldsymbol{j} + B_Z\, \boldsymbol{k}, \quad \text{ise}$$

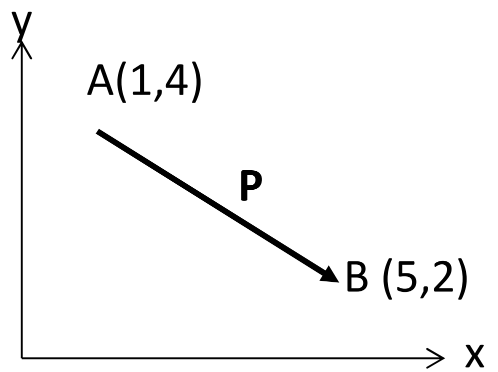
$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_X + B_X)\, \boldsymbol{i} + (A_Y + B_Y)\, \boldsymbol{j} + (A_Z + B_Z)\, \boldsymbol{k}$$

veya

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (A_X - B_X)\, \boldsymbol{i} + (A_Y - B_Y)\, \boldsymbol{j} + (A_Z - B_Z)\, \boldsymbol{k}$$ şeklinde hesaplanır.

Örnek-1

• **Soru:** Şekildeki A ve B noktaları ile sınırlanan P kuvvetinin analitik gösterimini yapınız. Büyüklüğünü ve birim vektörünü belirleyiniz.



•**Çözüm:** Vektör koordinatlarının bitişinden (B noktasından) başlangıcı (A noktasını) çıkartarak vektör analitik olarak ifade edilir.

$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y = (5-1)\vec{i} + (2-4)\vec{j} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$$

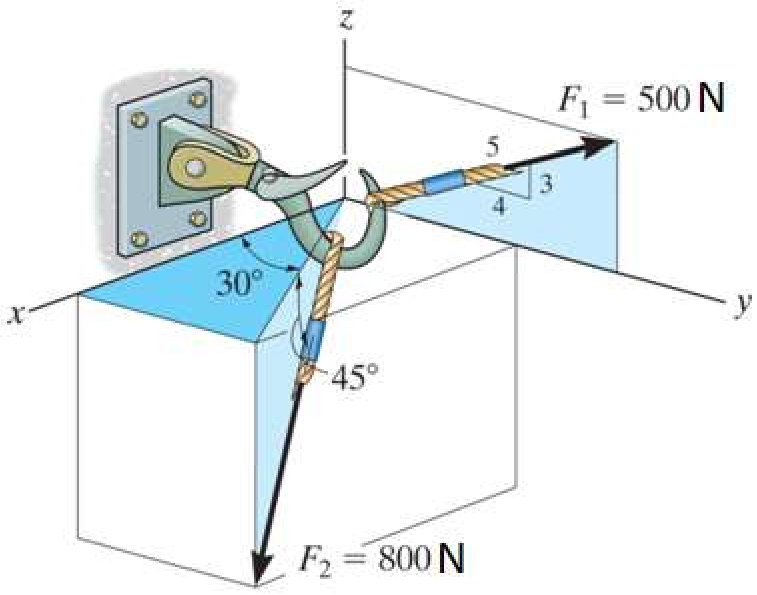
Vektörün büyüklüğü:

$$\left|\vec{P}\right| = \sqrt{\left|\vec{P}_x\right|^2 + \left|\vec{P}_y\right|^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

P vektörünün birim vektörü:

$$\overrightarrow{u_P} = \frac{\vec{P}}{\left|\vec{P}\right|} = \frac{4\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{20}} = \frac{4}{\sqrt{20}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{20}}\vec{j} = 0,894\vec{i} + 0,447\vec{j}$$

Örnek-2



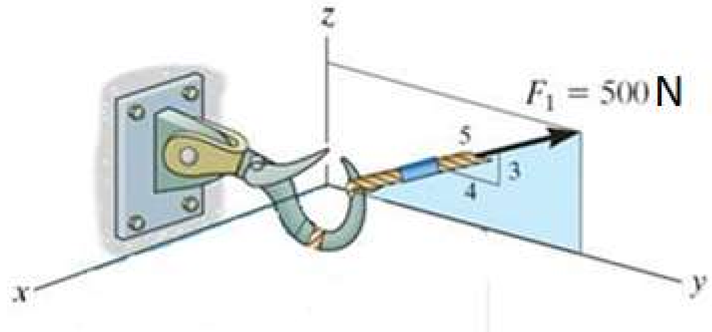
- **Soru:** Şekildeki kancaya etkiyen iki kuvvetin bileşke kuvvetini kartezyen vektör formunda ifade ediniz.

- **Çözüm:** Önce F_1 kuvvetini bileşenlere ayıralım;

$F_x = 0 = 0$ N

$F_y = 500\ (4/5) = 400$ N

$F_z = 500\ (3/5) = 300$ N



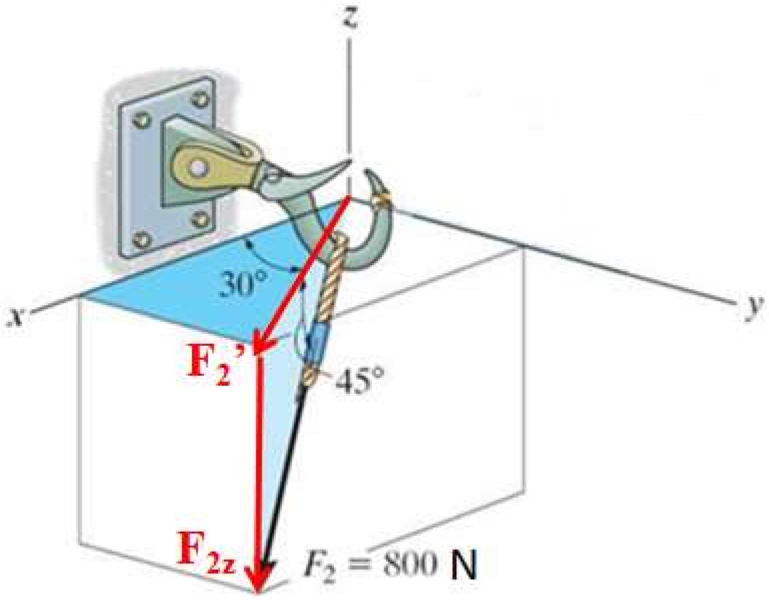
F₁ vektörünü kartezyen formda yazalım

(birimi unutmadan);

$\boldsymbol{F_1} = \{0\,\boldsymbol{i} + 400\,\boldsymbol{j} + 300\,\boldsymbol{k}\}$ N

Örnek-2

•**Çözüm:** Şimdi F_2 kuvvetini bileşenlere ayıralım (uç uca ekleme yöntemiyle);



F_{2z} = -800 sin 45° = – 565,7 N

F_2' = 800 cos 45° = 565,7 N

F_2' tekrardan bileşene ayrılabilir;

F_{2x} = 565,7 cos 30° = 489,9 N

F_{2y} = 565,7 sin 30° = 282,8 N

x ve y bileşenleri toplanır ise;

$\boldsymbol{F_2}$ = {489.9 ***i*** + 282.8 ***j*** – 565.7 ***k*** } N

Sonuçta $F_R = F_1 + F_2$ işlemini yapabiliriz;

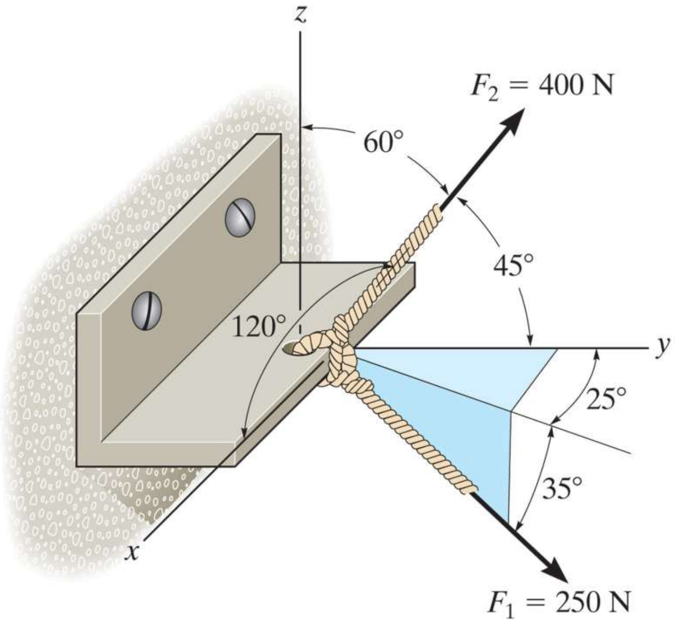
F_1 = {0 ***i*** + 400 ***j*** + 300 ***k***} N

F_2 = {489,9 ***i*** + 282,8 ***j*** – 565,7 ***k*** } N

F_R = { 490 ***i*** + 683 ***j*** – 266 ***k*** } N

Örnek-3

- **Soru:** Şekildeki çelik profile halatlarla etkitilen iki kuvvetin bileşkesinin büyüklüğünü ve koordinat doğrultman açılarını tespit ediniz.



•**Çözüm:** Önce F_2 kuvvetini kartezyen formda yazalım;

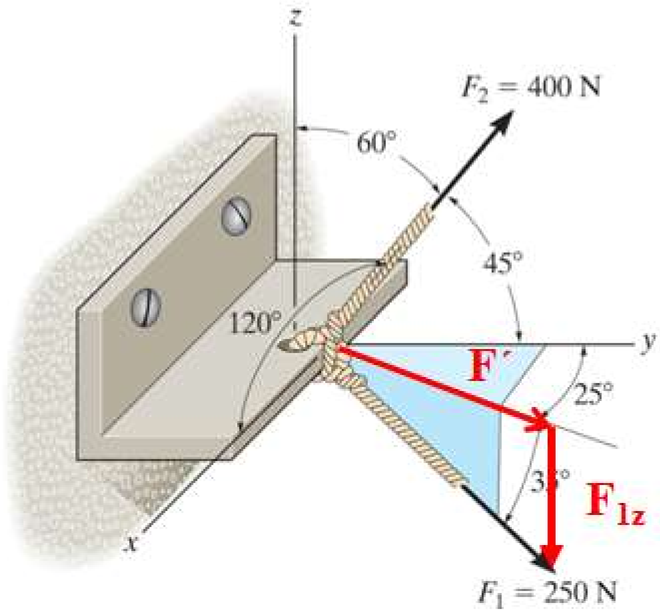
$$\boldsymbol{F_2} = 400\{ \cos 120° \, \boldsymbol{i} + \cos 45° \, \boldsymbol{j} + \cos 60° \, \boldsymbol{k} \} \text{ N}$$

$$= \{ -200 \, \boldsymbol{i} + 282.8 \, \boldsymbol{j} + 200 \, \boldsymbol{k} \} \text{ N}$$

$$\boldsymbol{F_2} = \{ -200 \, \boldsymbol{i} + 282.8 \, \boldsymbol{j} + 200 \, \boldsymbol{k} \} \text{ N}$$

Örnek-3

•**Çözüm:** Şimdi F_1 kuvvetini bileşenlerine ayırıp kartezyen formda yazalım;



F_{1z} = - 250 sin 35° = - 143,4 N

F´ = 250 cos 35° = 204,8 N

F´ bileşenlerine ayrılır;

F_{1x} = 204.8 sin 25° = 86,6 N

F_{1y} = 204.8 cos 25° = 185,6 N

$\boldsymbol{F_1}$ = {86,6 ***i*** + 185,6 ***j*** – 143,4 ***k*** } N

$\boldsymbol{F_R} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}$ işlemini yaparsak;

$\boldsymbol{F_1}$ = { 86,6 ***i*** + 185,6 ***j*** – 143,4 ***k***} N

$\boldsymbol{F_2}$ = { -200 ***i*** + 282,8 ***j*** + 200 ***k***} N

$\boldsymbol{F_R}$ = { -113,4 ***i*** + 468,4 ***j*** + 56,6 ***k***} N

Bileşke kuvvetin büyüklüğü ve doğrultman açıları;

$F_R = \{(-113,4)^2 + 468,4^2 + 56,6^2\}^{1/2} = 485,2 = \underline{485\text{ N}}$

$\alpha = \cos^{-1}(F_{Rx} / F_R) = \cos^{-1}(-113,4 / 485,2) = \underline{104°}$

$\beta = \cos^{-1}(F_{Ry} / F_R) = \cos^{-1}(468,4 / 485,2) = \underline{15.1°}$

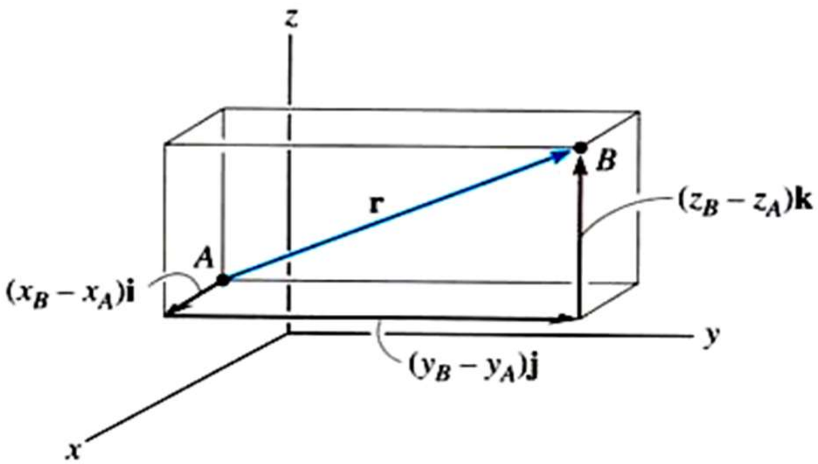
$\gamma = \cos^{-1}(F_{Rz} / F_R) = \cos^{-1}(56,6 / 485,2) = \underline{83.3°}$

Konum vektörleri

• Konum vektörü, uzaydaki bir noktayı diğer bir noktaya göre konumlandıran sabit bir vektör olarak tanımlanır.

•3B uzayda iki nokta ele alalım; A ve B. Noktaların koordinatları sırasıyla (X_A, Y_A, Z_A) ve (X_B, Y_B, Z_B) olsun.

•A'dan B'ye yönlenen konum vektörü, r_{AB} olarak isimlendirilir.

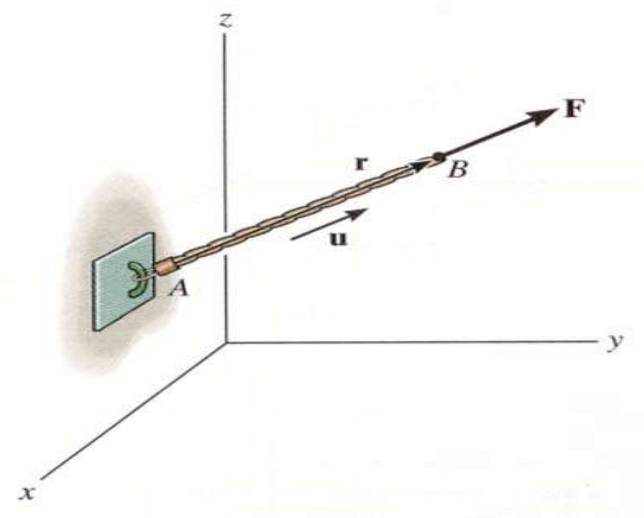


$$\boldsymbol{r_{AB}} = \{(X_B - X_A)\,\boldsymbol{i} + (Y_B - Y_A)\,\boldsymbol{j} + (Z_B - Z_A)\,\boldsymbol{k}\}\text{m}$$

•Vektörün başlangıç noktası A, bitiş noktası B'dir. Konum vektörü bulunurken okla gösterilen bitiş noktasından (B), başlangıç noktasının koordinatları çıkarılır.

Bir çizgi boyunca etkiyen kuvvet vektörü

- Eğer bir kuvvet bir çizgi boyunca yönlenmişse, bu kuvveti Kartezyen koordinatlardaki bir birim vektör ve vektörün büyüklüğü ile gösterebiliriz. Gerekenler;



a) Bu çizgi üzerindeki iki nokta boyunca uzanan konum vektörü, $\boldsymbol{r}_{AB}$ ‘yi bulmak.

b) Çizginin yönünü tanımlayan birim vektörü bulmak, $\boldsymbol{u}_{AB} = (\boldsymbol{r}_{AB}/r_{AB})$

c) Son olarak birim vektörle kuvvetin büyüklüğünü çarpmaktır, $\boldsymbol{F} = F\ \boldsymbol{u}_{AB}$.

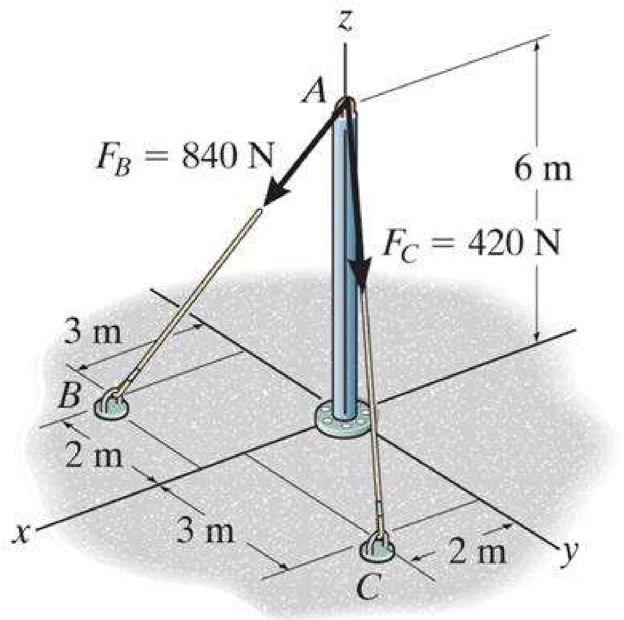
Örnek-1

•**Soru:** Şekildeki FAC kuvvetini kartezyen vektör formunda ifade ediniz.

•**Çözüm:** Şekle göre, A'dan C'ye hareket ederken, z-yönünde -6 m, y-yönünde 3 m ve x-yönünde 2 m ilerlemeliyiz. Konum vektörünün artezyen hali;

$\boldsymbol{r}_{AC} = \{2\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} - 6\,\boldsymbol{k}\}$ m.

Önemli: $\boldsymbol{r}_{AC}$'ye C'nin koordinatlarından A'nın koordinatlarını çıkararak da ulaşabiliriz.



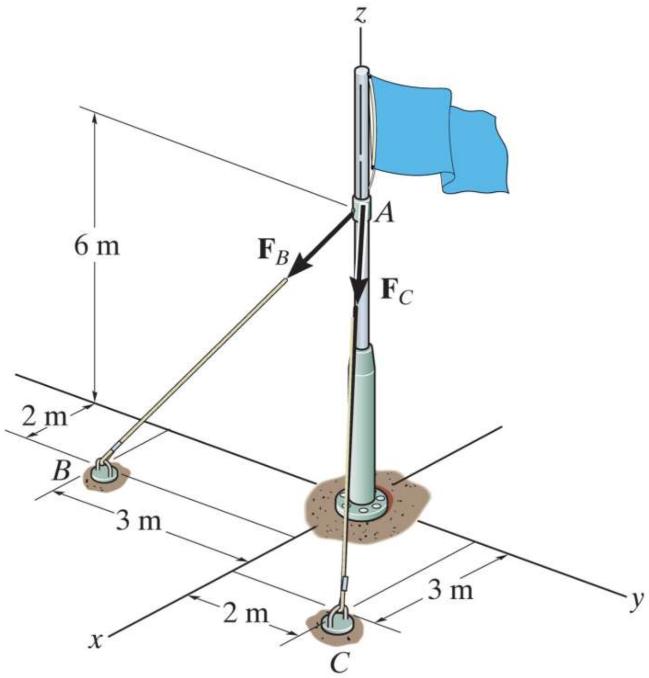
Konum vektörünün büyüklüğü; $r_{AC} = \{2^2 + 3^2 + (-6)^2\}^{1/2} = 7$ m

Birim vektör $\boldsymbol{u}_{AC} = \boldsymbol{r}_{AC}/r_{AC}$ ise kuvvet vektörü $\boldsymbol{F}_{AC} = 420\,\boldsymbol{u}_{AC} = 420\,(\boldsymbol{r}_{AC}/r_{AC})$

Böylece $\boldsymbol{F}_{AC} = 420\{(2\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} - 6\,\boldsymbol{k}) / 7\}$ N

$= \{120\,\boldsymbol{i} + 180\,\boldsymbol{j} - 360\,\boldsymbol{k}\}$ N

Örnek-2



•**Soru:** Şekildeki bayrak direğine etkiyen bileşke kuvvetin büyüklüğü ve koordinat yön açılarını bulunuz

•**Çözüm:**

$\mathbf{r}_{AB} = \{2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}\}$ m $\quad r_{AB} = \{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2\}^{1/2} = 7$ m

$\mathbf{r}_{AC} = \{3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}\}$ m $\quad r_{AC} = \{3^2 + 2^2 + (-6)^2\}^{1/2} = 7$ m

$\mathbf{F}_{AB} = 560\,(\mathbf{r}_{AB} / r_{AB})$ N $\quad \mathbf{F}_{AC} = 700\,(\mathbf{r}_{AC} / r_{AC})$ N

$\mathbf{F}_{AB} = 560\,(2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}) / 7$ N $\quad \mathbf{F}_{AC} = 700\,(3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}) / 7$ N

$\mathbf{F}_{AB} = (160\,\mathbf{i} - 240\,\mathbf{j} - 480\,\mathbf{k})$ N $\quad \mathbf{F}_{AC} = \{300\,\mathbf{i} + 200\,\mathbf{j} - 600\,\mathbf{k}\}$ N

$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}$

$= \{460\,\mathbf{i} - 40\,\mathbf{j} - 1080\,\mathbf{k}\}$ N

$F_R = \{460^2 + (-40)^2 + (-1080)^2\}^{1/2}$

$= 1174{,}6$ N

$F_R = \underline{1175\text{ N}}$

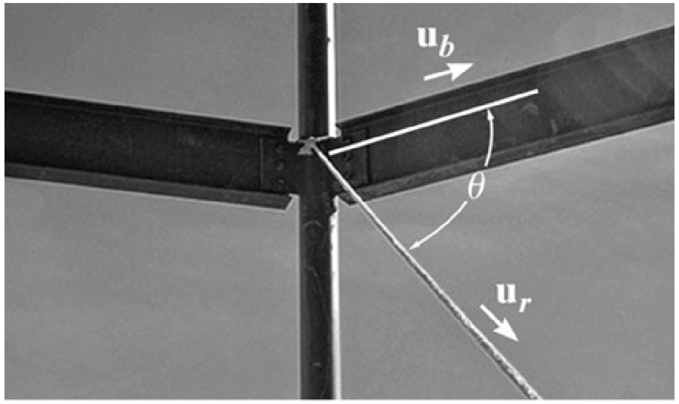
$\alpha = \cos^{-1}(460/1175) = \underline{66{,}9^\circ}$

$\beta = \cos^{-1}(-40/1175) = \underline{92{,}0^\circ}$

$\gamma = \cos^{-1}(-1080/1175) = \underline{157^\circ}$

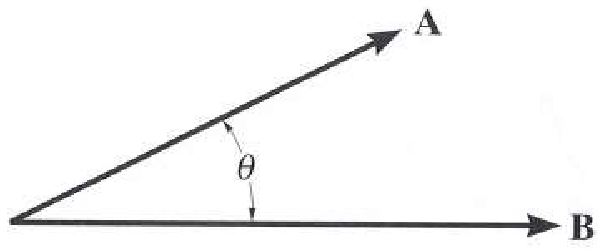
Skaler (nokta) çarpım

• Vektörlerin skaler çarpımlarını kullanarak iki vektör arasındaki açıyı, bir vektörün belirli bir çizgi üzerine izdüşümünü hesaplayabiliriz.



•2B problemlerde trigonometri ile yukarıdaki büyüklükleri hesaplamak kolay iken 3B uzaydaki problemlerde vektörler arası işlemler uygulamak gerekir.

•Skaler çarpım A ve B büyüklüğüne sahip ***A*** ve ***B*** vektörleri için;



$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = A\,B \cos\theta$ şeklinde ifade edilir.

"A skaler çarpım B diye okunur"

•θ açısı iki vektör arasındaki en küçük açıdır ve her zaman 0º ile 180º arasındadır.

Skaler (nokta) çarpım

Tanımdan hareketle, $\boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{j} = 0$ (çünkü $\cos 90° = 0$)

$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = A\,B \cos\theta$

$\boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{i} = 1$ (çünkü $\cos 0° = 1$)

- Değişme özelliği (komütatiflik)
- Skaler ile çarpım
- Dağılma kuralı (distributiflik)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

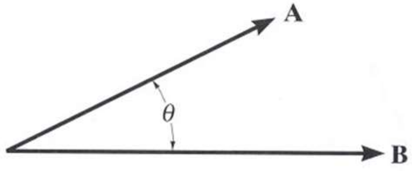
$$a(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (a\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(a\vec{B})$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{B})+(\vec{A}\cdot\vec{D})$$

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = (A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}) \bullet (B_x \boldsymbol{i} + B_y \boldsymbol{j} + B_z \boldsymbol{k})$$

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Kartezyen formdaki iki vektör arasındaki açıyı bulurken;



a) Vektörel çarpımın sonucu bulunur, $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)$,

b) ***A*** ve ***B*** vektörlerinin büyüklükleri olan A ve B bulunur.

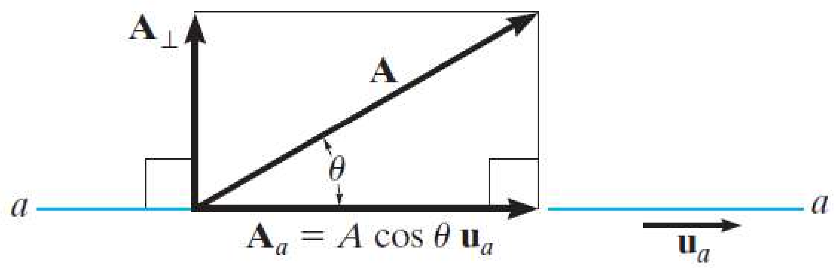
c) Skaler çarpımın tanımından iki vektör arasındaki açı hesaplanır;

$$\theta = \cos^{-1}[(\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B})/(A\,B)], \qquad 0° \le \theta \le 180°.$$

Skaler (nokta) çarpım

•Nokta çarpım kullanarak bir vektörün, bir eksene dik ve ona paralel olan bileşenlerini bulabiliriz.

•Nokta çarpım kullanarak bir vektörün, bir çizgiye dik ve ona paralel olan bileşenlerini bulabiliriz.



Adımlar;

1. aa çizgisi boyunca tanımlanan $\boldsymbol{u_a}$ birim vektörü bulunur,
2. $\boldsymbol{A}$ vektörünün aa çizgisi üzerindeki izdüşümün bulunur (skaler değerdir),

$A_a = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{u_a} = A_x u_x + A_y u_y + A_z u_z$

3. Eğer gerekirse, $\boldsymbol{u_a}$ birim vektörü ve Adım 2'de bulunan büyüklük kullanılarak "izdüşüm" bir vektör şeklinde de, $\boldsymbol{A_a}$ yazılabilir

$\boldsymbol{A_a} = A_a \boldsymbol{u_a}$

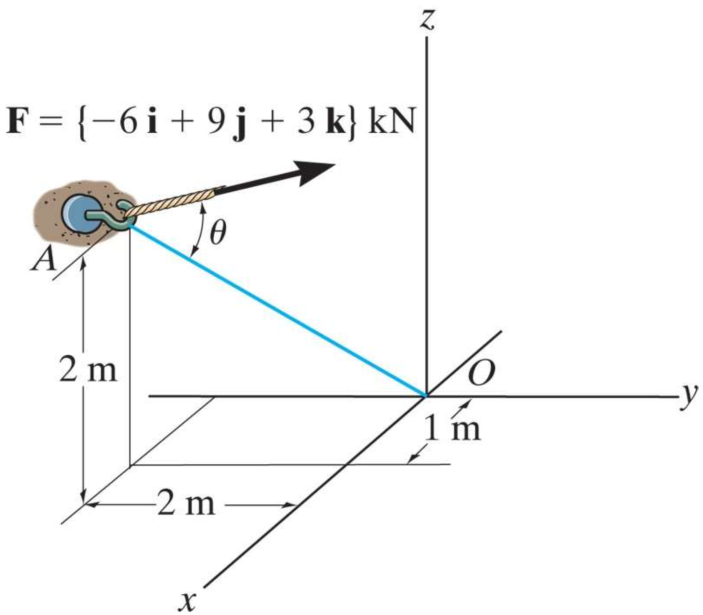
4. Dik bileşenin skaler ve vektörel formları da aşağıdaki gibi kolayca elde edilebilir;

$A_\perp = (A^2 - A_a^2)^{½}$ ve $\boldsymbol{A_\perp} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A_a}$

(toplama işlemini hatırlayın $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_\perp} + \boldsymbol{A_a}$)

Örnek-1

•**Soru:** Kancaya bir F kuvveti etkimektedir. AO çizgisi ve kuvvet vektörü arasında kalan açıyı ve kuvvetin AO çizgisi üzerindeki izdüşümünün büyüklüğünü bulunuz.



•**Çözüm:** Aşağıdaki planla çözüm yapılır;

1. $\boldsymbol{r}_{AO}$ konum vektörünü bul.

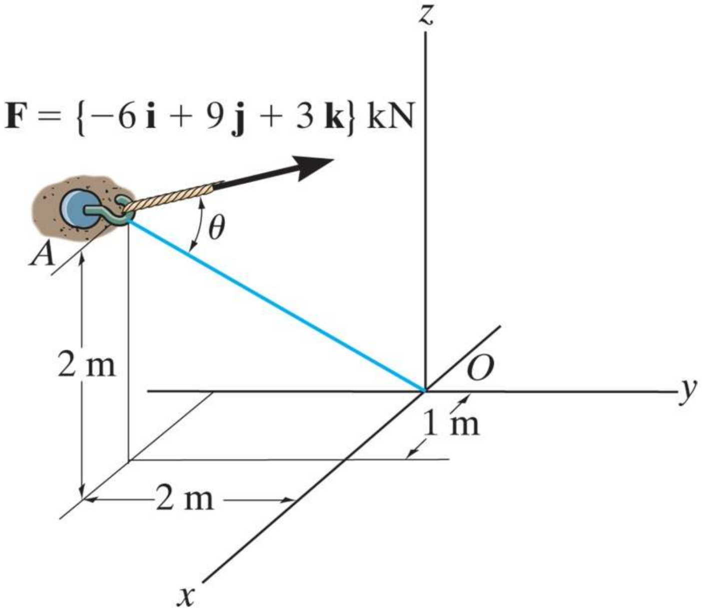
2. $\theta = \cos^{-1}\{(\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{r}_{AO})/(F\ r_{AO})\}$
Kuvvet ile konum vektörü arasındaki açı bulunur.

3. $F_{AO} = \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{u}_{AO}$ (veya $F \cos \theta$)
işlemiyle kuvevtin AO üzerindeki izdüşümü bulunur.

$\boxed{\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = A\ B \cos \theta}$

Örnek-1

•**Çözüm:**



$\boldsymbol{r}_{AO} = \{-1\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{k}\}$ m

$r_{AO} = \{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2\}^{1/2} = 3$ m

$\boldsymbol{F} = \{-6\,\boldsymbol{i} + 9\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}\}$ kN

$F = \{(-6)^2 + 9^2 + 3^2\}^{1/2} = 11.22$ kN

$\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{r}_{AO} = (-6)(-1) + (9)(2) + (3)(-2) = 18$ kN·m

$\theta = \cos^{-1}\{(\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{r}_{AO})/(F\, r_{AO})\}$ $\theta = \cos^{-1}\{18 / (11{,}22 \times 3)\} = \underline{57.67^\circ}$

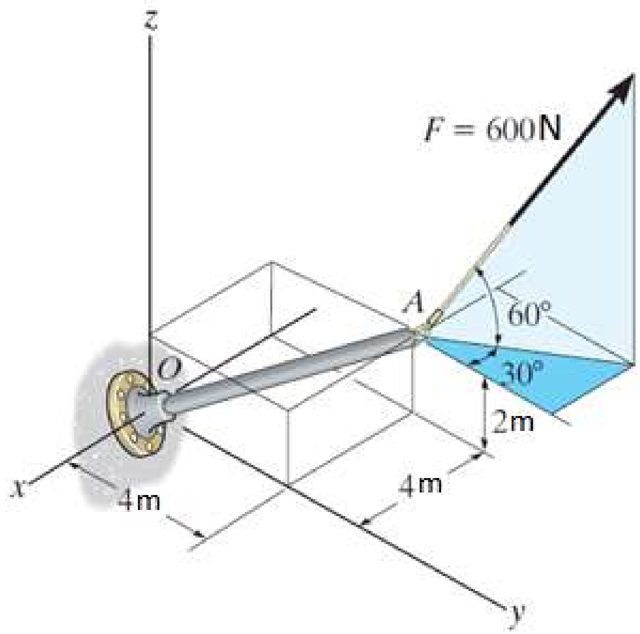
$\boldsymbol{u}_{AO} = \boldsymbol{r}_{AO} / r_{AO} = (-1/3)\,\boldsymbol{i} + (2/3)\,\boldsymbol{j} + (-2/3)\,\boldsymbol{k}$

$F_{AO} = \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{u}_{AO} = (-6)(-1/3) + (9)(2/3) + (3)(-2/3) = \underline{6.00 \text{ kN}}$

Veya➔ $F_{AO} = F \cos\theta = 11.22 \cos(57{,}67^\circ) = \underline{6.00 \text{ kN}}$

Örnek-2

•**Soru:** Şekildeki direğe etkitilen kuvvetin direğe dik ve paralel bileşenlerini bulunuz.



•**Çözüm:**

a) ***F*** kartezyen formda ifade edilir. Direk doğrultusunda $\boldsymbol{r}_{OA}$ ve $\boldsymbol{u}_{OA}$ bulunur.

b) ***F*** ve birim vektör ($\boldsymbol{u}_{OA}$) kullanılarak direğe paralel bileşenin büyüklüğü bulunur

$F_{||} = \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{u}_{OA}$

c) ***F*** 'in direğe dik bileşeni $F_{\perp} = (F^2 - F_{||}{}^2)^{½}$ ile hesaplanır.

$\boldsymbol{r}_{OA} = \{-4\,\boldsymbol{i} + 4\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k}\}$ m

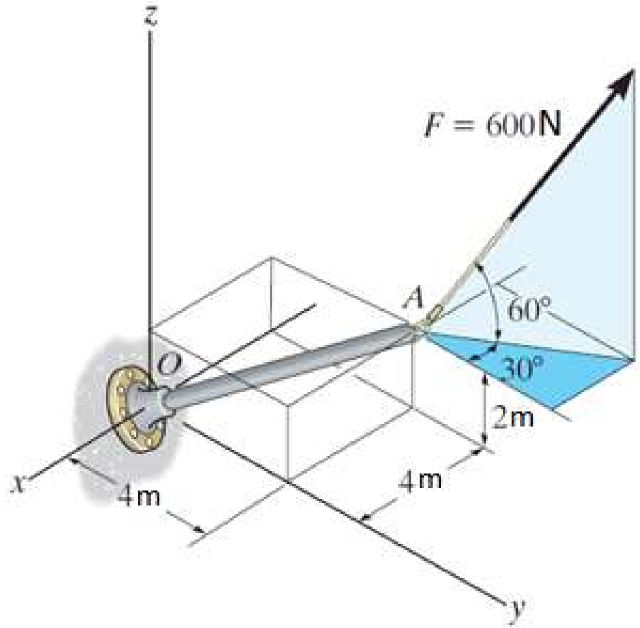
$r_{OA} = \{(-4)^2 + 4^2 + 2^2\}^{1/2} = 6$ m

$\boldsymbol{u}_{OA} = -2/3\,\boldsymbol{i} + 2/3\,\boldsymbol{j} + 1/3\,\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{F} = \{-(600 \cos 60°) \sin 30°\,\boldsymbol{i}$
$+ (600 \cos 60°) \cos 30°\,\boldsymbol{j}$
$+ (600 \sin 60°)\,\boldsymbol{k}\}$ N

$\boldsymbol{F} = \{-150\,\boldsymbol{i} + 259{,}8\,\boldsymbol{j} + 519{,}6\,\boldsymbol{k}\}$ N

Örnek-2



- **Çözüm:**

F 'in direğe paralel bileşeni:

$F_{||}$ = ***F*** • $\boldsymbol{u}_{OA}$ ={-150 ***i*** + 259,8 ***j*** + 519,6 ***k***}• {-2/3 ***i*** + 2/3 ***j*** + 1/3 ***k***}

$F_{||}$ = (-150) × (-2/3) + 259,8 × (2/3) + 519,6 × (1/3) = 446 N

F = 600 N

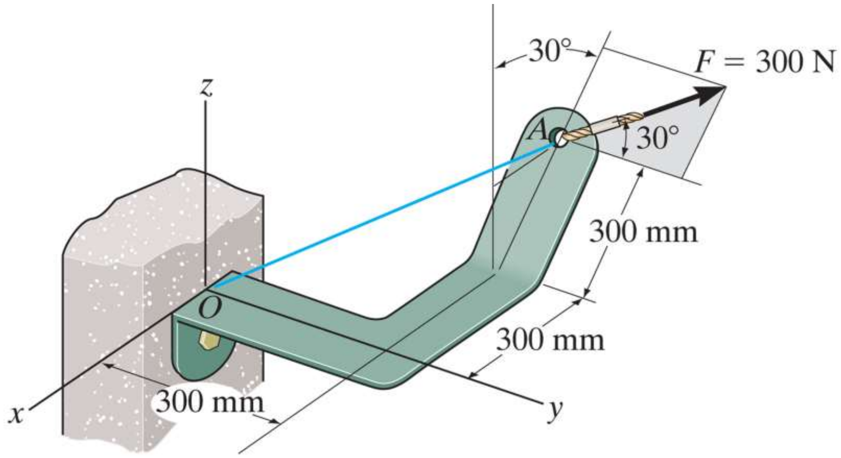
$F_{||}$ = 446 N

F 'in direğe dik bileşeni:

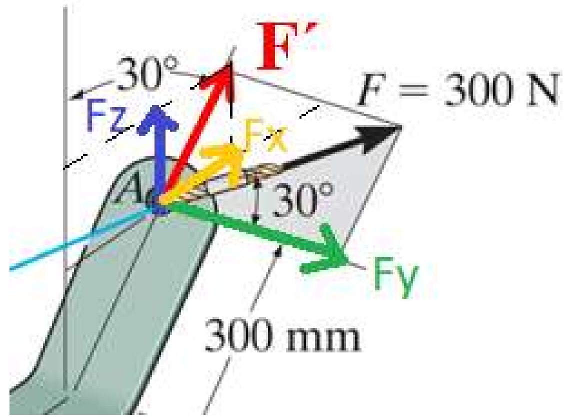
$F_{\perp} = (F^2 - F_{||}{}^2)^{1/2} = (600^2 - 446^2)^{1/2}$ = 401 N

Örnek-3

•**Soru:** Şekildeki dirseğe 300 N büyüklüğünde bir kuvvet etkimektedir. OA çizgisi boyunca etkiyen kuvvet bileşeninin büyüklüğü nedir?



•**Çözüm:** Öncelikle F kuvveti kartezyen formda ifade edilir. Sonra OA hattındaki doğrultu vektörü bulunur ve buradan birim vektör hesaplanır. Birim vektör ile F vektörünün çarpımı OA bileşeninin büyüklüğünü verir.



$F' = 300 \sin 30^\circ = 150$ N

F $= \{-150 \sin 30^\circ \boldsymbol{i} + 300 \cos 30^\circ \boldsymbol{j} + 150 \cos 30^\circ \boldsymbol{k}\}$ N

F $= \{-75\ \boldsymbol{i} + 259{,}8\ \boldsymbol{j} + 129{,}9\ \boldsymbol{k}\}$ N

$F = \{(-75)^2 + 259{,}8^2 + 129{,}9^2\}^{1/2} = 300$ N

Örnek-3

•**Çözüm:**

$\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{r}_{OA}$ = (-75) (-0.45) + (259.8) (0.30) + (129.9) (0.26) = 145.5 N·m

F vektörü ve OA doğrultusundaki konum vektörü arasındaki açı skaler çarpım yöntemiyle tespit edilebilir.

$$\boxed{\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = A\ B \cos \theta}$$

$$\theta = \cos^{-1}\{(\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{r}_{OA})/(F \times r_{OA})\}$$

$$\theta = \cos^{-1}\{145{,}5\ /(300 \times 0{,}60)\} = \underline{36{,}1^\circ}$$

F vektörünün OA doğrultusundaki bileşeninin büyüklüğü, vektör ve OA birim vektörünün çarpımına eşittir.

$$F_{OA} = \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{u}_{OA}$$
$$= (-75)(-0{,}75) + (259{,}8)\ (0.50) + (129{,}9)\ (0{,}433)$$
$$= \underline{242\ \ N}$$

Veya F vektörünün büyüklüğünün cos θ ile çarpımı ile OA bileşeni bulunur.

$$F_{OA} = F \cos \theta = 300 \cos 36.1^\circ = \underline{242\ N}$$

Faydalanılan kaynaklar:
Mühendislik Mekaniği - Statik, R.C. Hibbeler, S.C. Fan
(Mühendislik Mekaniği – Statik'in Pearson yayınevi tarafından hazırlanan İngilizce sunumları)
Mehmet. H. Omurtag – Mühendisler İçin Mekanik – Statik (Birsen Yayın Evi)
Atilla Orbay – Ayrıntılı Örneklerle Statik (Birsen Yayın Evi)
Kisi.deu.edu.tr/serkan.misir (Pearson yayınevi tarafından hazırlanan sunumların Türkçe çevirisi)
Kisi.deu.edu.tr/burak.felekoglu
Kisi.deu.edu.tr/kamile.tosun
noskovtools.com
www.physicsclassroom.com
Wikipedia.org
https://ramblingsuitcase.com
https://theconstructor.org
https://www.quora.com/What-is-the-difference-between-fixed-support-and-pinned-support