

STATİK

(MADEN MÜHENDİSLİĞİ)

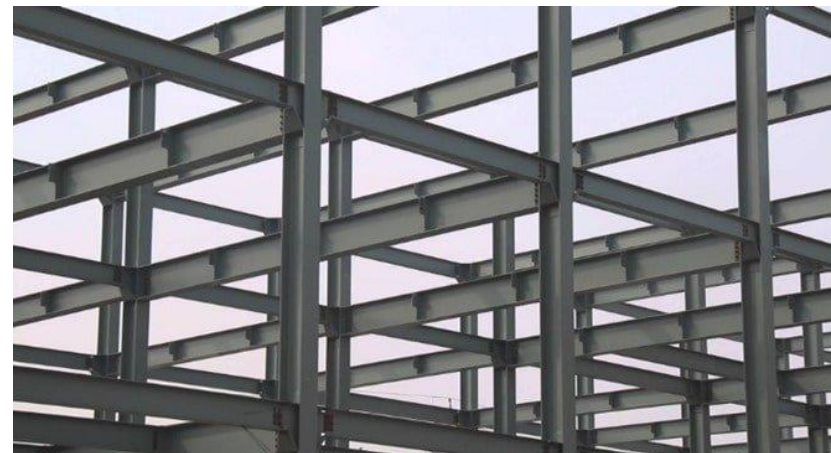
Dr. Öğr. Üyesi Çağlar YALÇINKAYA

(Dokuz Eylül Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü)

Ders notları için: www.caglaryalcinkaya.com

ATALET MOMENTLERİ

- Kirişler, kolonlar ve diğer bir çok yapısal eleman I, H, C şekillerine benzeyen bir kesite sahiptir.
- Bu elemanlar neden içi tam dolu basit geometrilerden (kare, daire vb.) imal edilmemektedir?
- Yapısal bir elemanın tasarımında seçilecek geometriye hangi esaslar ile karar verilmektedir?
- Bu bölümde, mühendisin seçimlerini büyük oranda belirleyen ve yapı elemanı kesitinin önemli özelliklerinden birisi olan atalet momenti ele alınacaktır.



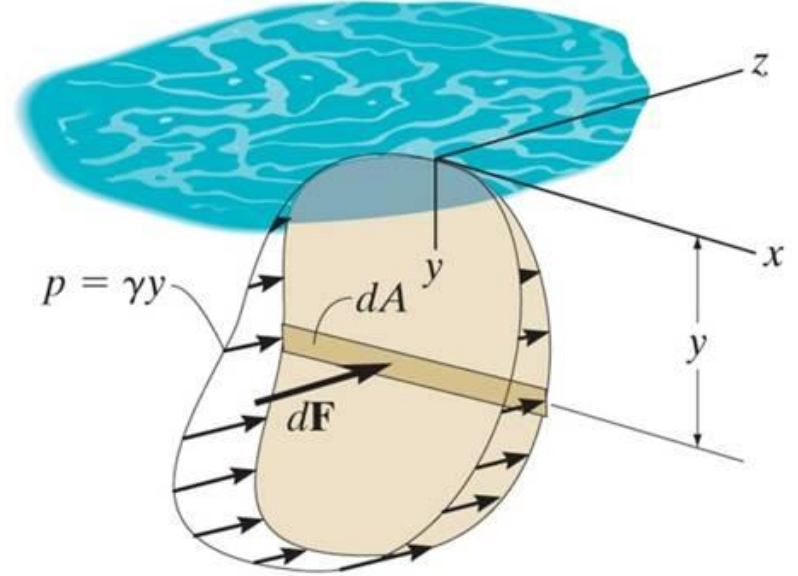
Alanlar için atalet momentinin tanımı

•Ataletin sözcüğü durağanlık, eylemsizlik gibi anlamlara sahiptir. Bir cismin atalet momenti, mühendislik elemanının geometrik dizaynında eğilme, burulma gibi zorlanmalara karşı direnci olarak karşılık bulmaktadır.

•Bir alanın atalet momenti, moment ekseninden itibaren lineer olarak değişen bir yayılı yükün momentini hesaplamak gerektiğinde ortaya çıkar.

•Şekildeki gibi sıvı içerisine batırılmış bir cisim ele alalım. Yüzeyden y kadar derinlikteki bir noktaya tesir eden sıvı basıncı $p = \gamma y$ (sıvının özgül ağırlığı γ derinlik) şekline ifade edilir.

•Bu noktadaki bir dA alanı üzerine etkiyen kuvvet: $dF = p dA$, bu kuvvetin x ekseninde etrafında sebep olduğu moment: $y (dF)$ olur.

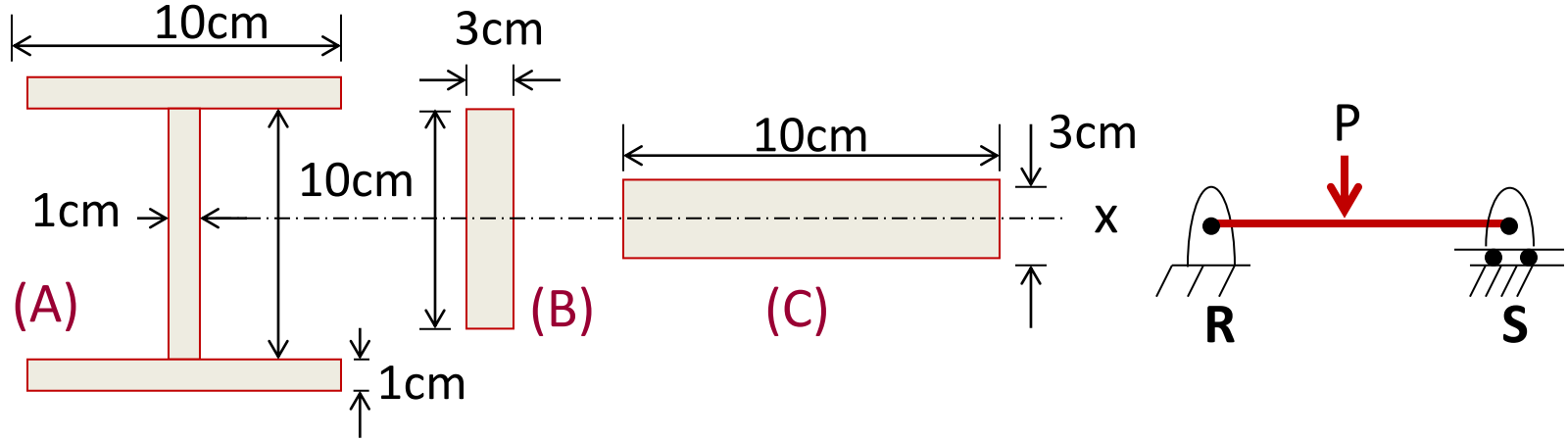


•Toplam moment

$$\int_A y dF = \int_A \gamma y^2 dA = \gamma \int_A (y^2 dA) \text{ olur.}$$

•Bu integral terim, A alanının x ekseninde etrafındaki atalet momenti olarak isimlendirilir. I ile gösterilir. (Moment of Inertia).

Alanlar için atalet momentinin tanımı



•RS kirişi için yukarıdaki gibi üç farklı kesit düşünelim A, B ve C. Hepsinin aynı malzemeden yapıldığını düşünelim ve hesaplarsak toplam kesit alanı eşittir. Cisimlerin birim uzunluk başına düşen kütleleri de eşittir.

•Sağda görülen düşey P kuvveti uygulanmış kiriş için, hangi kesit şekli kullanılırsa daha az iç gerilme ve sehim (çökme) oluşur?

•Cevap, kirişin x eksenini etrafındaki Atalet Momenti ile ilişkilidir. A kesitindeki alanların büyük kısmı x ekseninden daha uzakta olduğundan bu kesitin atalet momenti en büyüktür. Bu sebeple daha az gerilme ve sehim oluşur.

Alanlar için atalet momentinin tanımı

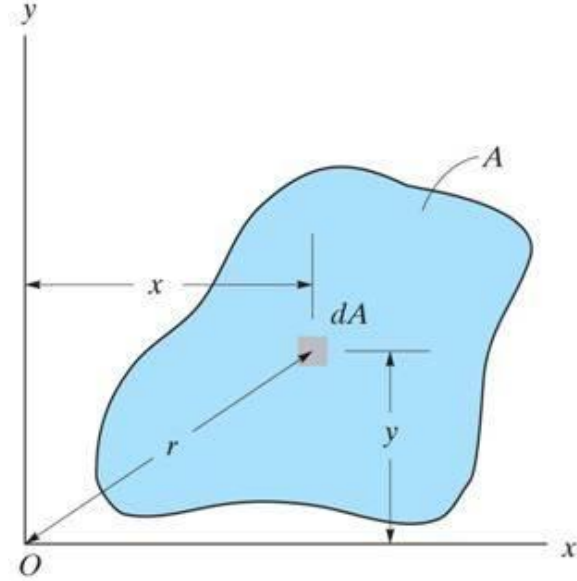
Şekilde gösterilen dA diferansiyel alanı için;

$$d I_x = y^2 dA ,$$

$$d I_y = x^2 dA ,$$

$$d J_O = r^2 dA$$

burada J_O , z eksenini veya O noktası etrafındaki polar (kutupsal) atalet momentidir. I_x , I_y ve J_O her zaman pozitifdir, birimi m^4 , cm^4 , mm^4 'dür.



Tüm alanın atalet momentini integrasyon sonucu elde edilir;

$$I_x = \int_A y^2 dA ; \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

$$J_O = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

Atalet momentini ayrıca alanın ikinci momenti olarak da isimlendirilir ve uzunluğun dördüncü kuvveti birimindedir (örn: m^4).

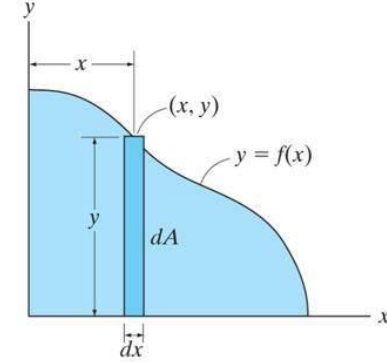
Bir Alanın Atalet Momentinin İntegrasyon İle Bulunması

Basitliđi sebebiyle, kullanılan alan eleman sadece tek doğrultuda (dx veya dy) diferansiyel boyuta sahiptir. Böylece tek bir integral alınır ve bu genellikle iki diferansiyel barındıran çift katlı (dx ve dy) integralden daha kolaydır. İşlem adımları;

1. dA alanının seğimi:

a) Atalet momentinin hesaplanacağı eksene paralel eleman seğmek genellikle daha basit bir çözümdür. Genellikle I_x 'i hesaplamak için yatay şerit, I_y 'i hesaplamak için düşey şerit kullanılır.

b) Eđer y , x cinsinden kolayca ifade edilebiliyorsa (örneğin, $y = x^2 + 1$), bu durumda dx diferansiyel genişlikli düşey bir şerit seğmek avantajlı olabilir.



2. İntegrasyon (yukarıdaki örneğ için):

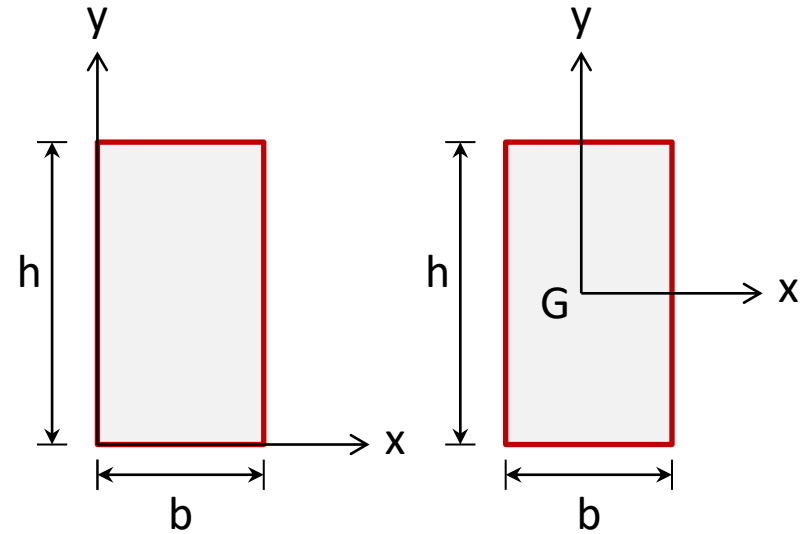
$$I_y = \int x^2 dA = \int x^2 y dx$$

$$I_x = \int dI_x = \int (1/3) y^3 dx \text{ (paralel eksenler teoremi)}$$

Diferansiyel genişlik dx olduğundan, y 'nin x cinsinden ifade edilmesi gerekir ve ayrıca integral limitlerinin de x cinsinden olması gerekir.

ÖRNEK-1

- **Soru:** Bir dikdörtgen kesitin tabanlarından ve ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentini tespit ediniz.
- **Çözüm:** Atalet momenti hesaplanacak eksene paralel diferansiyel bir alan tanımlanır ve integrasyon yapılır.

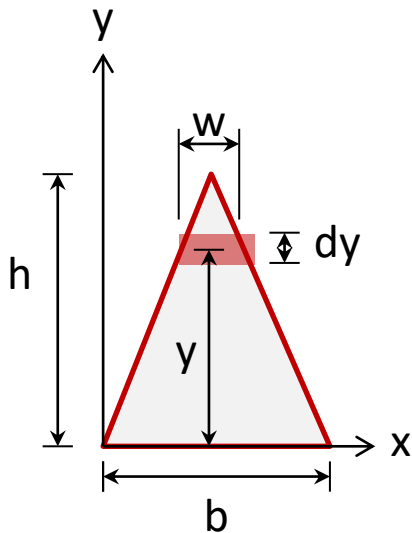
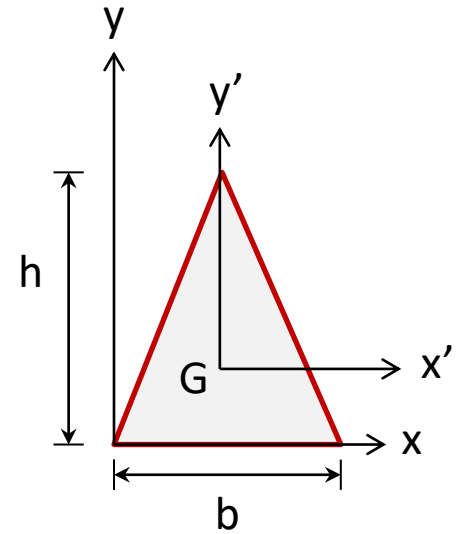


$dA = b \cdot dy$
 $I_x = \int y^2 dA = b \cdot \int_0^h y^2 dy = \frac{b \cdot h^3}{3}$
 $I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$
 $I_y = \frac{h \cdot b^3}{3}$

$I_x = \int y^2 dA \quad dA = b \cdot dy$
 $I_x = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$
 $I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$

ÖRNEK-2

- **Soru:** Üçgen bir kesitin tabanından ve ağırlık merkezinden geçen x-eksenine göre atalet momentini tespit ediniz.
- **Çözüm:** Atalet momenti hesaplanacak eksene paralel diferansiyel bir alan tanımlanır ve integrasyon yapılır.



$$I_x = \int y^2 dA \quad dA = w \cdot dy$$

$$\frac{w}{b} = \frac{h-y}{h} \quad w = \frac{b}{h}(h-y)$$

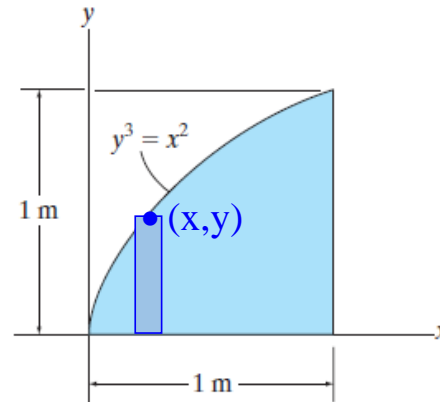
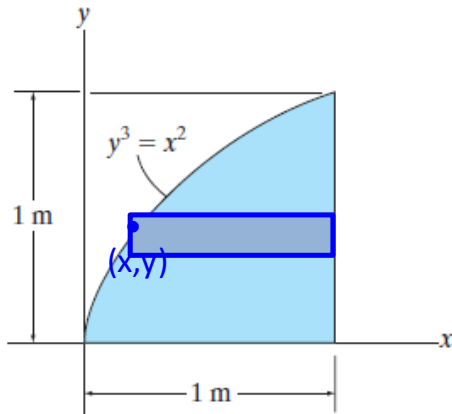
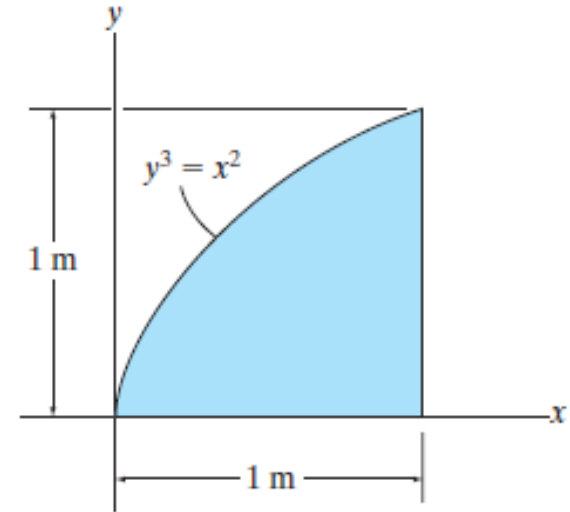
$$I_x = \int_0^h y^2 \left(\frac{b}{h}h - \frac{b}{h}y \right) dy,$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_{xG} = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y'^2 dA = \frac{bh^3}{36}$$

ÖRNEK-3

- **Soru:** Şekildeki taralı alanın I_x ve I_y değerlerini bulunuz.
- **Çözüm:** y değerleri x cinsinden verildiğinden dx diferansiyel genişlikli düşey bir şerit seçilir.



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$dA = (1 - x) dy = (1 - y^{3/2}) dy$$

$$I_x = \int_0^1 y^2 (1 - y^{3/2}) dy$$

$$= \left[\frac{1}{3} y^3 - \frac{2}{9} y^{9/2} \right]_0^1 = \underline{0.111 \text{ m}^4}$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int x^2 y dx$$

$$= \int x^2 (x^{2/3}) dx$$

$$= \int_0^1 x^{8/3} dx$$

$$= \left[\frac{3}{11} x^{11/3} \right]_0^1$$

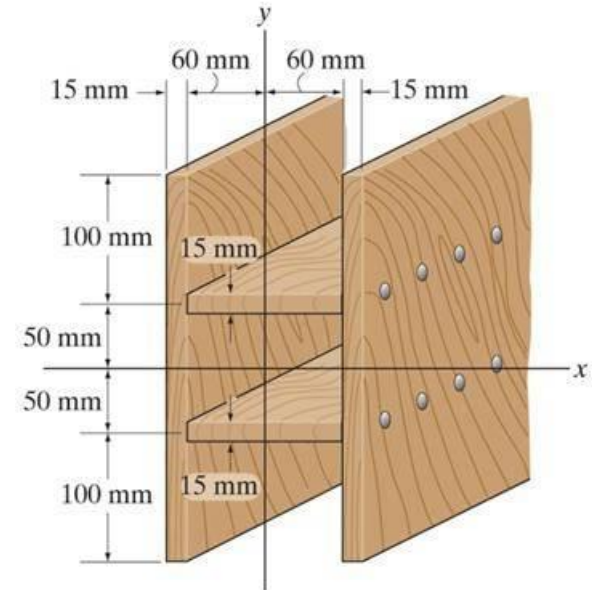
$$= \underline{0.273 \text{ m}^4}$$

Kompozit kesitler/alanlar

Yapısal elemanların kesit alanları genellikle ya basit şekillerdir ya da bunların bir araya getirilmesi ile oluşan kompozit kesitlerdir. Bu tür elemanları tasarlamak için atalet momentlerini hesaplamamız gerekir.

Kompozit kesite bir başka örnek yanda verilmektedir. Oluşturulan bu türdeki elemanlara bileşik eleman (yapma eleman) denmektedir.

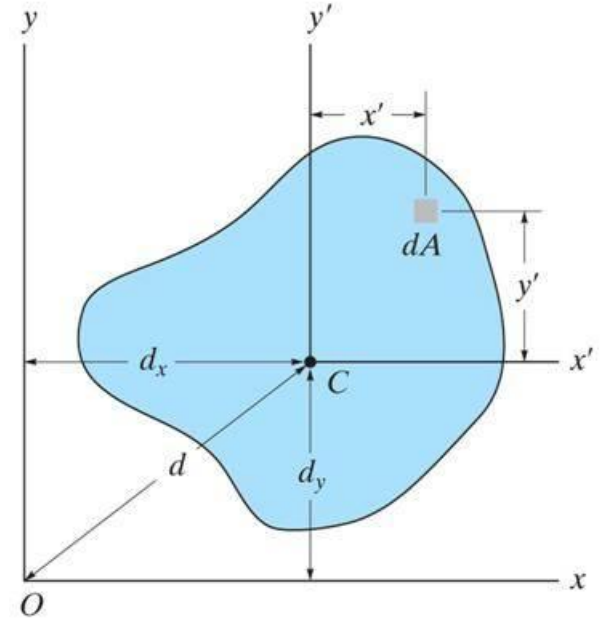
Bu tür kesitlerin atalet momentlerinin hesabında integrasyon yöntemine göre daha basit bir yöntem mevcuttur: "Paralel Eksenler (Steiner) Teoremi."



Alanlar için paralel eksenler (Steiner) teoremi

•Paralel eksenler teoremi bir alanın kendi geometrik merkezinden geçen eksene göre atalet momenti ile hesap yapılmak istenen paralel eksen arasındaki ilişkiyi kurar. Bu teorem sayesinde kompozit kesitlerin atalet momenti, integrasyon yöntemine kıyasla daha kolay hesaplanabilir.

•C geometrik merkezi bilinen bir alan ele alalım. x' ve y' eksenleri C'den geçen eksenlerdir. x' ekseninden d_y mesafedeki paralel x eksenindeki atalet momenti, paralel eksenler teoremiyle bulunur.



Alanlar için paralel eksenler (Steiner) teoremi

- Paralel eksenler teoremi bir alanın kendi

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y' + d_y)^2 dA$$
$$= \int_A y'^2 dA + 2 d_y \int_A y' dA + d_y^2 \int_A dA$$

\bar{I}_x'
(ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti)

0
(ağırlık merkezine göre statik moment sıfırdır)

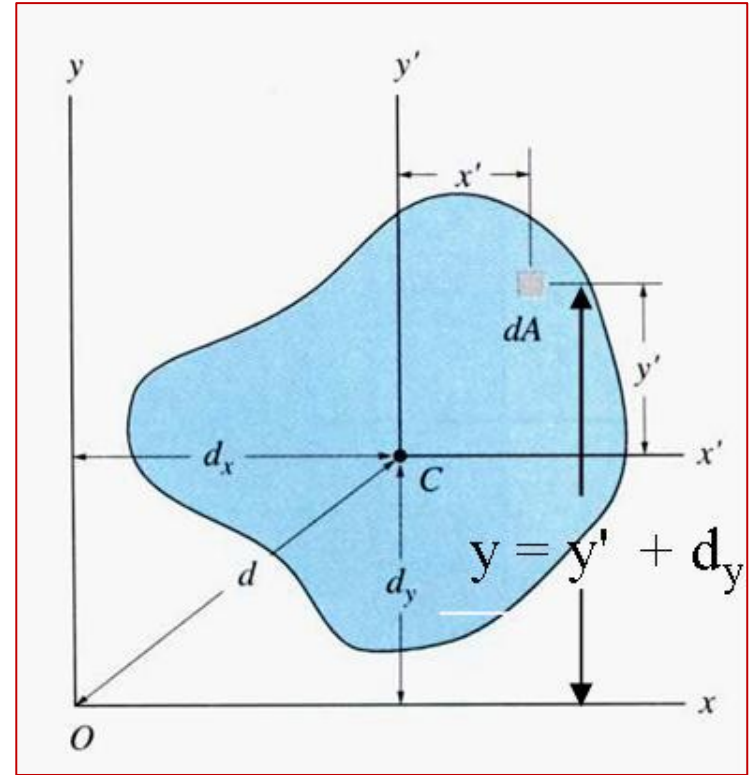
$A d_y^2$

Böylece $I_x = \bar{I}_x' + A d_y^2$

Benzer şekilde, $I_y = \bar{I}_y' + A d_x^2$

$$J_O = \bar{J}_C + A d^2$$

- Alanın ağırlık merkezindeki eksene paralel diğer bir eksene göre atalet momenti = ağırlık merkezindeki atalet momenti + (Alan × paralel eksene olan mesafenin karesi)



Bir alanın atalet yarıçapı

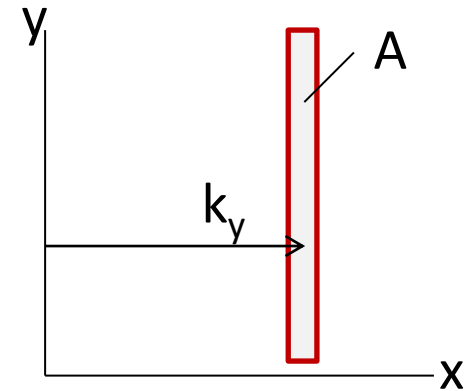
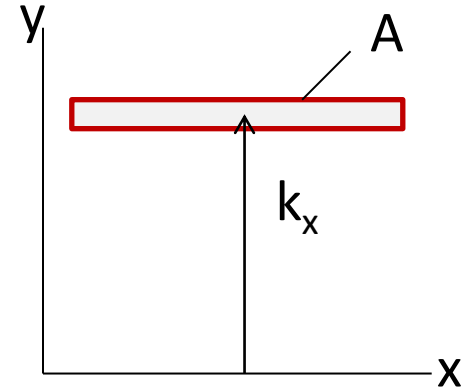
•Atalet momenti I_x olan bir A alanının x ekseninden belirli bir k_x mesafesine yerleştirildiğini düşünelim.

$$I_x = k_x A \text{ veya } k_x = \sqrt{(I_x / A)}$$

$$I_y = k_y A \text{ veya } k_y = \sqrt{(I_y / A)}$$

$$k_o = \sqrt{(J_o / A)}$$

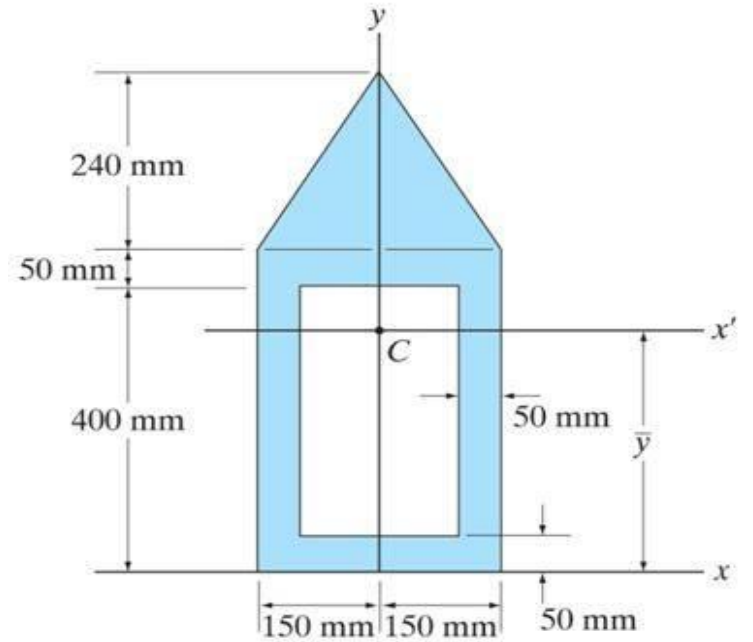
•Atalet yarıçapı uzunluk birimine sahiptir ve ilgili alanın eksenden olan saçılımı (parçalarının eksene mesafesi) için bir göstergedir.



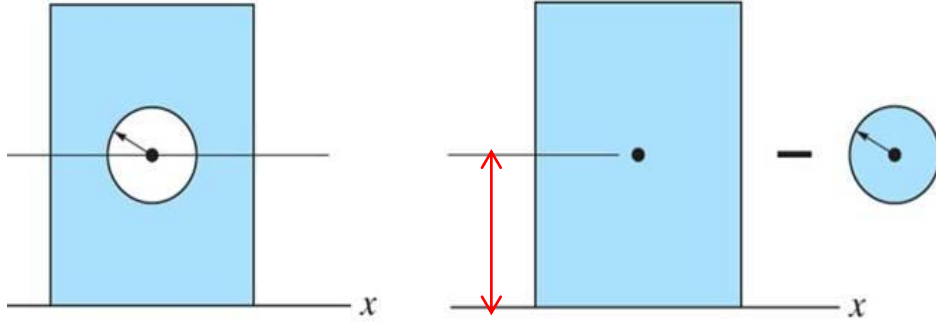
Kompozit bir kesitin (alanın) atalet momenti

•Kompozit bir kesit (alan), dikdörtgen, üçgen, daire gibi “basit” geometrik şekilli bir dizi alanın toplanması veya çıkarılmasından oluşmaktadır. Örneğin yandaki alan, bir dikdörtgene bir üçgenin eklenmesi ve bir iç dikdörtgenin çıkarılmasıyla elde edilir.

•Mühendislik kitaplarının, teknik ajandaların son sayfalarında genellikle basit geometrik şekilli alanların kendi geometrik merkezlerinden geçen eksene göre atalet momentleri bulunur. Geometrik merkezlerdeki atalet momentlerini ve paralel eksenler teoremini kullanarak kompozit bir alanın atalet momentini kolaylıkla bulabiliriz.



Kompozit bir kesitin (alanın) atalet momenti-işlem adımları

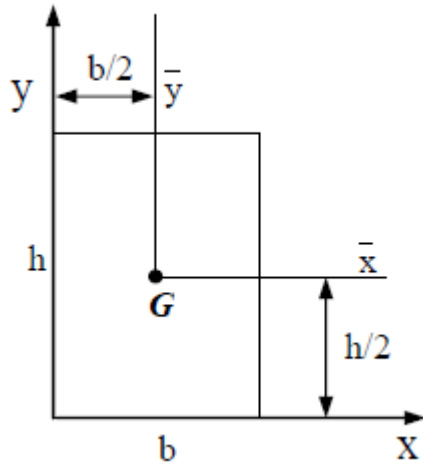


1. Verilen alan daha geometrik merkezindeki atalet momenti bilinen basit şekilli geometrilere ayrılır.
2. Her bir ayrı parçanın geometrik merkezinin yeri bulunur ve atalet momenti hesaplanacak olan eksene dik mesafeler tespit edilir.
3. Paralel eksenler teoremini kullanarak her basit şekilli parçanın istenen eksene göre atalet momentleri bulunur.

$$I_x = \bar{I}_x' + A d_y^2 \quad I_y = \bar{I}_y' + A d_x^2$$

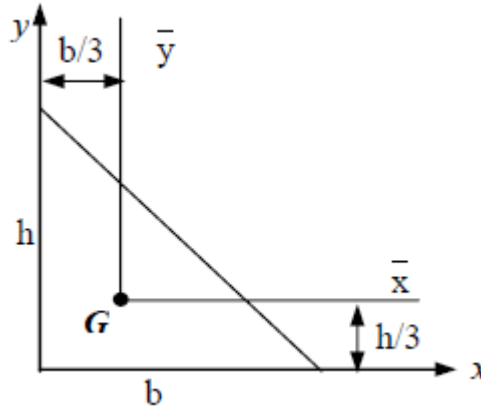
3. Tüm alanın istenen eksene göre atalet momenti, Adım 3'te her bir parça için bulunan atalet momentlerinin birleştirilmesi sonucu elde edilir. Boşlukların atalet momentinin çıkarılacağını unutmayınız.

Sık kullanılan geometrilerin atalet momentleri

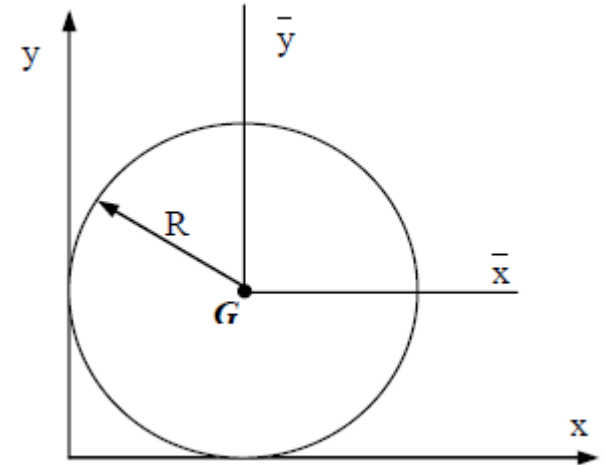


$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12} \quad \bar{I}_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \quad I_y = \frac{hb^3}{3}$$

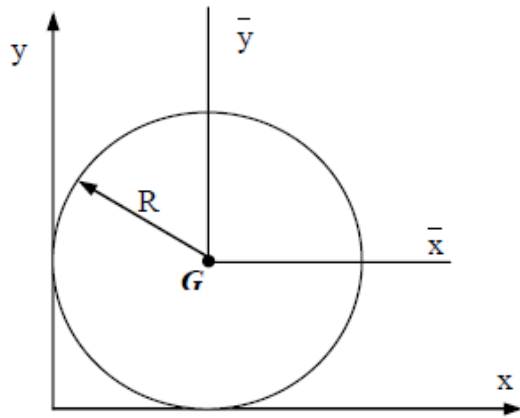


$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} \quad \bar{I}_y = \frac{hb^3}{36}$$

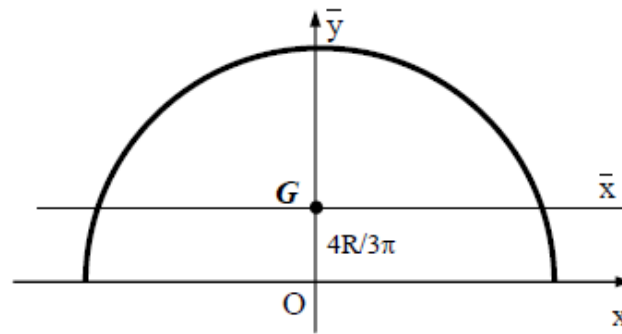


$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

Sık kullanılan geometrilerin atalet momentleri

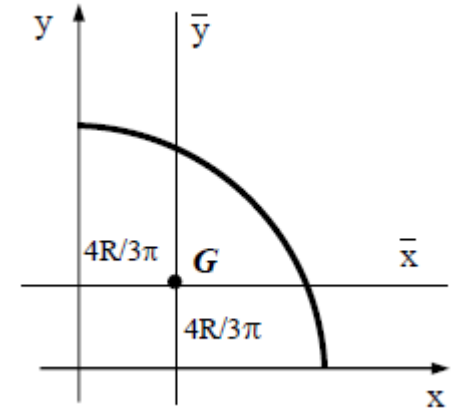


$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{4}$$



$$\bar{I}_x = R^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \quad \bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi R^4}{8}$$

$$I_x = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi R^4}{8}$$



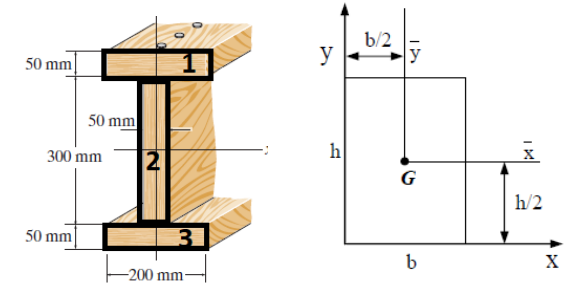
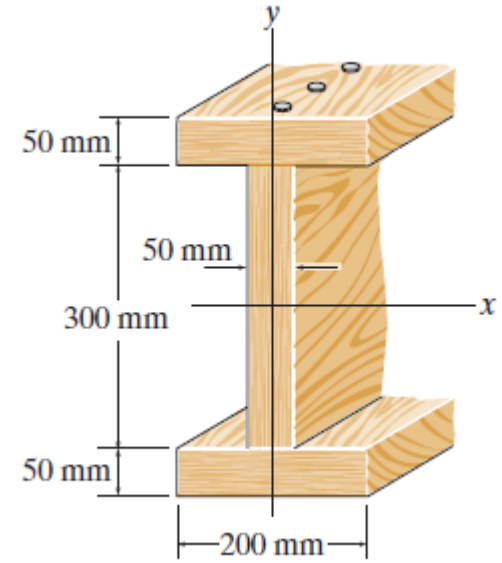
$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right)$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{16}$$

★ *Dikkat: Bu ifadelerde "R" yarıçaptır* ★

ÖRNEK-4

- **Soru:** Şekildeki kompozit kesitli kirişin x eksenine göre atalet momentini ve atalet yarı çapını tespit ediniz.
- **Çözüm:** Kesit 3 adet dikdörtgen alana bölünür. Alanların geometrik merkezlerinin eksenden uzaklığı belirlenir. Paralel eksenler teoremi uygulanır.



$$I_{x[2]} = (1/12) (50 \text{ mm}) (300 \text{ mm})^3$$

$$= 1.125 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{x[1]} = I_{x[3]} = \bar{I}_x + A (d_y)^2$$

$$= (1/12) (200) (50)^3 + (200) (50) (175)^2$$

$$= 3.083 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$

$$\underline{I_x = 7.291 \times 10^8 \text{ mm}^4}$$

$$k_x = \sqrt{(I_x / A)}$$

$$A = 50 (300) + 200 (50) + 200 (50) = 3.5 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

$$k_x = \sqrt{(7.291 \times 10^8) / (3.5 \times 10^4)} = \underline{144 \text{ mm}}$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12} \quad \bar{I}_y = \frac{hb^3}{12}$$

ÖRNEK-5

- **Soru:** Şekildeki kompozit alanın x eksenine göre atalet momentini ve atalet yarı çapını tespit ediniz.
- **Çözüm:** Kesit 1 dikdörtgen alandan 1 daire ve 1 üçgen düşülecek şekilde alanlara bölünür. Alanların geometrik merkezlerinin eksenden uzaklığı belirlenir. Paralel eksenler teoremi uygulanır.

Geometrik merkezlerin x eksenine olan dik mesafeleri sırasıyla $d_a = 150 \text{ mm}$, $d_b = 150 \text{ mm}$ ve $d_c = 200 \text{ mm}$.

$$I_{Xa} = (1/12) (350) (300)^3 + (350)(300)(150)^2$$

$$= 3.15 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_{Xb} = (1/4) \pi (75)^4 + \pi (75)^2 (150)^2$$

$$= 4.224 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{Xc} = (1/36) (150) (300)^3$$

$$+ (1/2)(150) (300) (200)^2$$

$$= 1.013 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

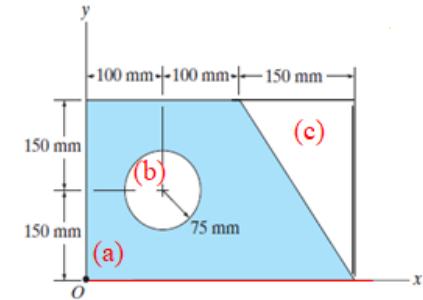
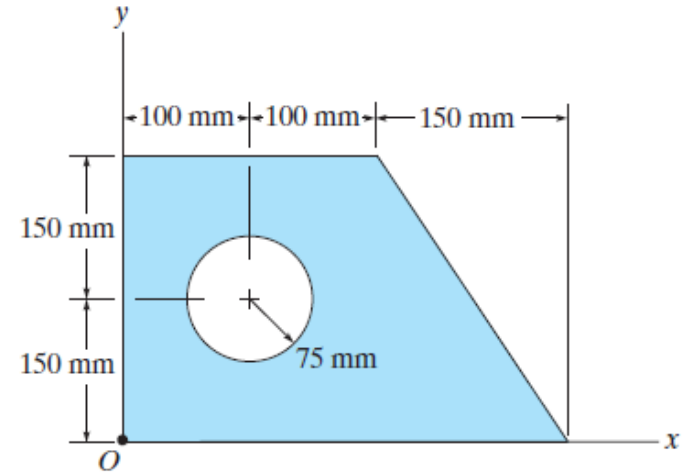
$$I_X = I_{Xa} - I_{Xb} - I_{Xc}$$

$$= \underline{1.715 \times 10^9 \text{ mm}^4}$$

$$k_X = \sqrt{I_X / A}$$

$$A = 350 (300) - \pi (75)^2 - (1/2) 150 (300) = 8.071 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

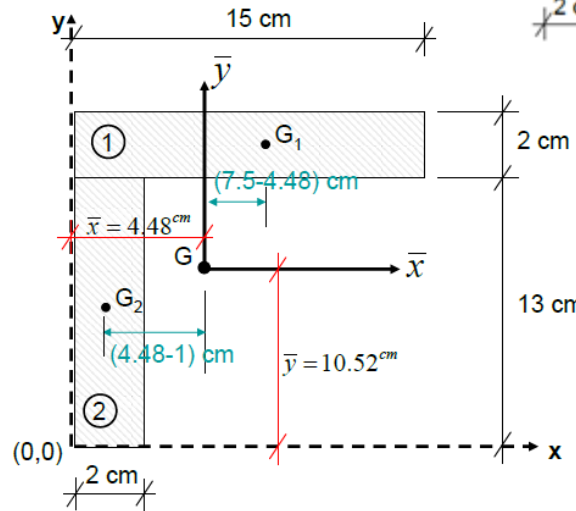
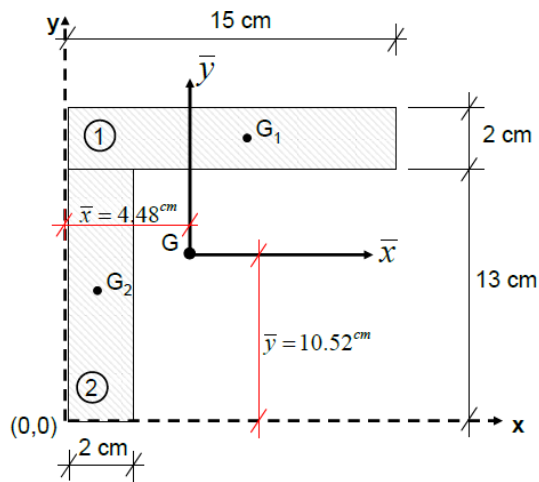
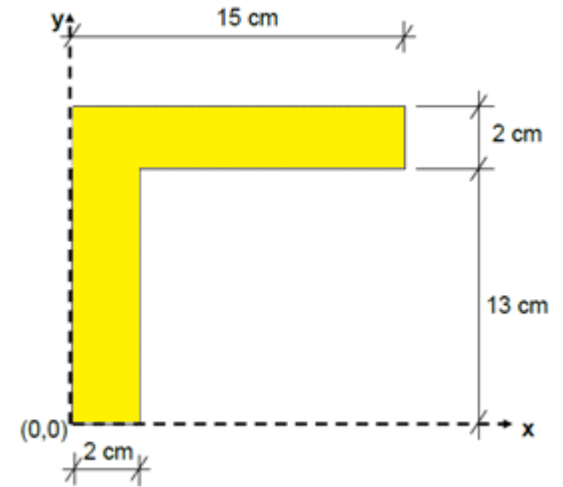
$$k_X = \sqrt{1.715 \times 10^9 / 8.071 \times 10^4} = \underline{146 \text{ mm}}$$



ÖRNEK-6

- Soru:** Şekildeki alanın ağırlık merkezinden geçen \bar{y} -eksenine göre atalet momentini tespit ediniz.

- Çözüm:**



$$I_{\bar{y}} = \sum_{i=1}^n (I_{\bar{y}_i} + x_i^2 \cdot A_i)$$

$$\bar{x} = \frac{(15 \cdot 2) \cdot 7.5 \text{ cm} + (2 \cdot 13) \cdot 1 \text{ cm}}{(15 \cdot 2) + (2 \cdot 13)} = 4.48 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{(15 \cdot 2) \cdot 14 \text{ cm} + (2 \cdot 13) \cdot 6.5 \text{ cm}}{(15 \cdot 2) + (2 \cdot 13)} = 10.52 \text{ cm}$$

$$I_{\bar{y}} = \frac{15^3 \cdot 2}{12} + (15 \cdot 2) \cdot (7.5 - 4.48)^2 + \frac{2^3 \cdot 13}{12} + (2 \cdot 13) \cdot (4.48 - 1)^2$$

$$I_{\bar{y}} = 1159.65 \text{ cm}^4$$

Faydalanılan kaynaklar:

Mühendislik Mekaniği - Statik, R.C. Hibbeler, S.C. Fan

(Mühendislik Mekaniği – Statik’in Pearson yayınevi tarafından hazırlanan İngilizce sunumları)

kisi.deu.edu.tr/serkan.misir – statik ders notları

kisi.deu.edu.tr/burak.felekoglu – statik ders notları (ÖRNEK 6 buradan alınmıştır)

Çelik fotoğrafları:

<https://theconstructor.org/structures/construction-steel-structure-foundations-columns-beams-floors/18648/>

<https://www.indiamart.com/proddetail/channel-beam-c-shaped-21472916930.html>

<https://www.metalsdepot.com/steel-products/steel-beams>